

التمرين الأول: (6نقطة)

الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقط $A\left(\frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{3}\right)$ ، $B\left(-\frac{2}{3}; 1; -\frac{1}{3}\right)$ ، $C\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; 1\right)$

(Δ) و (Δ') مستقيمان المعرفان ثمثيلهما الوسيط:

$$(\Delta') \begin{cases} x = -2t' + 1 \\ y = 2t' + 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

$$(\Delta) \begin{cases} x = -t + \frac{1}{3} \\ y = t \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1. أثبت أن يوجد مستو وحيد (P) يحوي المستقيمان (Δ) و (Δ') .

2. أ) عين معادلة ديكرتية للمستوي (P) .

ب) تحقق أن المستوي (ABC) هو المستوي (P) .

3. ليكن (Q) مستو معادلته: $x + y + z = 0$.

- أ) أثبت أن المستوي (Q) عمودي على المستوي (P) وفق المستقيم (Δ) .

ب) تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Δ') .

ج) استنتج إحداثيات المسقط العمودي للنقطة A على (Δ') .

د) أحسب مساحة المثلث ABC .

4. لتكن $D(0; 1; -1)$ نقطة من الفضاء.

أ) تحقق أن D تنتمي إلى المستوي (Q) .

ب) أحسب المسافة بين النقطة D و المستوي (P) .

ج) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

د) استنتج مساحة المثلث ABD .

التمرين الثاني: (4نقطة)

1) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $3n^3 - 11n + 48$ يقبل القسمة على $n + 3$.

2) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $3n^2 - 9n + 16$ عدد طبيعي غير معدوم.

3) أ) أثبت من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $PGCD(3n^3 - 11n; n + 3) = PGCD(48; n + 3)$

ب) $PGCD(a; b)$ يرمز إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

- عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 .

-استنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد $\frac{3n^3-11n}{n+3}$ طبيعيا.

التمرين الثالث (3 نقاط)

إليك الاقتراحات الأربع الآتية أذكر إن كانت صحيحة أم خاطئة مع التبرير.

1. العدد 2009 أولي.
2. العددان 2009 و 1430 أوليان فيما بينهما.
3. المعادلة $2009x - 21y = 7$ تقبل على الأقل حلا في \mathbb{Z}^2 .
4. إذا كانت الدالة f حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = -1$ حيث $f(0) = 2$ فإن $f'(0) = 0$.

التمرين الرابع: (7 نقاط)

الجزء الأول: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

و (γ) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة $1cm$).

1. أحسب نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$. فسر النتيجة هندسيا.

2. أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما: $f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x+1)$

- f' المشتقة الأولى للدالة f .

ب) أدرس إشارة f' ، ثم استنتج جدول تغيرات الدالة f على $]0; +\infty[$.

ج) أثبت أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حل وحيد α في المجال $]0; +\infty[$.

3. أنشئ (γ) في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

الجزء الثاني: g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = \frac{1}{x} - 2 \ln x$.

1. أثبت أن: $g = \ln \circ f$ ، مع "ln" هي الدالة اللوغارتمية النيبييرية.

2. أحسب نهايات الدالة g على أطراف مجال تعريفها.

3. أدرس تغيرات الدالة g .

4. أثبت أن $g(\alpha) = \ln 2$.

بالتوفيق والسداد