

التمرين الأول: (3نقطة)

اليك الاقتراحات الأربع الآتية أذكر إن كانت صحيحة أم خاطئة مع التبرير.

1. ليكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z-i|=|z+2i|$.
الإقتراح هو: (Δ) مستقيم يوازي حامل محور الأعداد الحقيقية.
2. ليكن $z=3+i\sqrt{3}$. الإقتراح هو: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، z^{3n} تخيلي صرف.
3. ليكن z عدد مركب غير معدوم. الإقتراح هو: إذا كان $|z|=1$ فإن $z^2 + \frac{1}{z^2}$ عدد حقيقي.
4. إذا كانت الدالة f حل للمعادلة التفاضلية $y'+y=-1$ حيث $f(0)=2$ فإن $f'(0)=0$.

التمرين الثاني: (5نقطة)

من أجل $M \neq \Omega$ نذكر أن النقطة M' هي صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه Ω وقيس زاويته θ إذا و فقط إذا كان:

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\overline{\Omega M}; \overline{\Omega M'}) = \theta + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) & (2) \end{cases}$$

(أ) ليكن z ، z' و w لواحق النقط M ، M' و Ω على الترتيب. أكتب العلاقتين (1) و (2) على شكل طويلة وعمدة.

(ب) استنتج عبارة z' بدلالة z ، θ و w .

2. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} : $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$. أعط الحلين على الشكل الجبري.

3. لتكن A و B نقطتان لاحتقيهما على الترتيب: $a = 2\sqrt{3} - 2i$ و $b = 2\sqrt{3} + 2i$.
(أ) أكتب a و b على الشكل الأسّي.

(ب) أنشئ النقطتين A و B .

(ج) بين أن المثلث OAB متقايس الأضلاع.

4. لتكن C نقطة لاحتقتها $c = -8i$. النقطة D صورة C بالدوران r الذي مركزه O وقيس زاويته $\frac{2\pi}{3}$.

مثل النقطتين C و D . ثم أثبت أن لاحقة النقطة D هي $d = 4\sqrt{3} + 4i$.

5. بين أن D هي صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه O . يطلب تحديد نسبته k .

6. برهن أن OAD مثلث قائم.

التمرين الثالث: (6نقطة)

الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقط $A\left(\frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{3}\right)$ $B\left(-\frac{2}{3}; 1; -\frac{1}{3}\right)$ $C\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; 1\right)$ (Δ') و (Δ) مستقيمان معرفان بتمثيلهما الوسيطين :

$$(\Delta') \begin{cases} x = -2t' + 1 \\ y = 2t' + 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}) \quad (\Delta) \begin{cases} x = -t + \frac{1}{3} \\ y = t \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1. أثبت أن يوجد مستو وحيد (P) يحوي المستقيمان (Δ) و (Δ') .
2. أ) عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) .
ب) تحقق أن المستوي (ABC) هو المستوي (P) .
3. ليكن (Q) مستو معادلته: $x + y + z = 0$.
- أ) أثبت أن المستوي (Q) عمودي على المستوي (P) وفق المستقيم (Δ) .
ب) تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Δ') .
ج) استنتج إحداثيات المسقط العمودي للنقطة A على (Δ') .
د) أحسب مساحة المثلث ABC .
4. لنكن $D(0; 1; -1)$ نقطة من الفضاء.
أ) تحقق أن D تنتمي إلى المستوي (Q) .
ب) أحسب المسافة بين النقطة D و المستوي (P) .
ج) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.
د) استنتج مساحة المثلث ABD .

التمرين الرابع: (6نقطة)

الجزء الأول: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

و (γ) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة 1cm).
1. أحسب نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$. فسر النتيجة هندسيا.

2. أ) أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما:
$$f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x + 1)$$

- المشتقة الأولى للدالة f .

- ب) أدرس إشارة f' ، ثم استنتج جدول تغيرات الدالة f على $]0; +\infty[$.
- ج) أثبت أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حل وحيد α في المجال $]0; +\infty[$.
3. أنشئ (γ) في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

الجزء الثاني: g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = \frac{1}{x} - 2 \ln x$

1. أثبت أن: $g = \ln \circ f$ ، مع "ln" هي الدالة اللوغارتمية النيبييرية.
2. أحسب نهايات الدالة g على أطراف مجموعة تعريفها.
3. أدرس تغيرات الدالة g .
4. أثبت أن $g(\alpha) = \ln 2$.