

الهندسة في الفضاء

تمارين

التمرين 01

التعامد و التوازي - المسافة بين نقطة و مستو .

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، تمثيلا وسيطيا لمستقيم (D) و معادلة ديكارتية لمستو (P) :

$$\bullet (P): x + 2y - 3z - 1 = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (D): \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$$

اختر الجواب الصحيح في كل سطر من الجدول التالي :

	الجواب (أ)	الجواب (ب)	الجواب (ج)
السطر 1	$A (-1; 3; 2) \in (D)$	$B (2; -1; -1) \in (D)$	$C (3; 1; -4) \in (D)$
السطر 2	$\vec{u} (1; 2; 3)$ هو شعاع توجيه لـ: (D)	$\vec{v} (-2; 1; 1)$ هو شعاع توجيه لـ: (D)	$\vec{w} (3; 1; 4)$ هو شعاع توجيه لـ: (D)
السطر 3	(D) محتواة في (P)	(D) يوازي تماما (P)	(D) يثقب (P)
السطر 4	$A' (1; 3; -2) \in (P)$	$B' (1; 3; 2) \in (P)$	$C' (1; 3; -1) \in (P)$
السطر 5	المستوي (Q_1) الذي معادلته $x + 2y - 3z + 1 = 0$ يعامد المستوي (P)	المستوي (Q_2) الذي معادلته $-4x + 5y + 2z + 3 = 0$ يعامد المستوي (P)	المستوي (Q_3) الذي معادلته $-3x + 2y - z - 1 = 0$ يعامد المستوي (P)
السطر 6	المسافة بين النقطة $M_1 (-1; -3; 2)$ و المستوي (P) هي $\sqrt{14}$	المسافة بين النقطة $M_1 (-1; -3; 2)$ و المستوي (P) هي 14	المسافة بين النقطة $M_1 (-1; -3; 2)$ و المستوي (P) هي $2\sqrt{3}$

التمرين 02

معادلة ديكارتية لمستوى ، تمثيل وسيطي لمستقيم - المرجح - المسافة بين نقطة و مستوى

- الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $2x + y - 2z + 4 = 0$ و النقط $A(3; 2; 6)$ ، $B(1; 2; 4)$ و $C(4; -2; 5)$.
1) بيّن أن النقط A ، B و C تعيّن مستو و بيّن أن هذا المستوي هو (P) .
2) (1-2) بيّن أن المثلث ABC قائم .
(2-2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل O و يعامد المستوي (P) .
(3-2) نسمي K المسقط العمودي للنقطة O على (P) . احسب المسافة OK .
(4-2) احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.
3) نسمي G مرجح الجملة $\{(O; 3), (A; 1), (B; 1), (C; 1)\}$.
(1-3) I هي مركز ثقل المثلث ABC . بيّن أن G تنتمي إلى (OI) .
(2-3) عيّن المسافة بين G و المستوي (P) .

التمرين 03

الاستقامية - مستقيم يعامد مستو - معادلة مستو - تقاطع مستقيم و مستقيم - المرجح - مجموعة نقطية .

- الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
نعتبر النقط $A(2; 1; 3)$ ، $B(-3; -1; 7)$ و $C(3; 2; 4)$.
1) بيّن أن A و B و C ليست على استقامة واحدة .
(2)
$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 هو تمثيل وسيطي للمستقيم (d) .
(1-2) بيّن أن (d) يعامد المستوي (ABC) .
(2-2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
3) H هي تقاطع (d) و (ABC) .
(1-3) بيّن أن H هي مرجح الجملة $\{(A; -2), (B; -1), (C; 2)\}$.
(2-3) عيّن الطبيعة و العناصر المميزة للمجموعة (Γ_1) للنقط M من الفضاء حيث :
$$(-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}) \bullet (\vec{MB} - \vec{MC}) = 0$$

(3-3) عيّن الطبيعة و العناصر المميزة للمجموعة (Γ_2) للنقط M من الفضاء حيث :
$$\| -2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \sqrt{29}$$

التمرين 04

المسافة بين نقطة و مستو - تقاطع مستو و كرة .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}; \vec{k})$.

الجزء الأول

a, b, c و d أعداد حقيقية حيث $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

(P) هو المستوي الذي معادلته $ax + by + cz + d = 0$.

نعتبر النقطة $I(x_I; y_I; z_I)$ و الشعاع $\vec{n}(a; b; c)$.

الهدف في هذا الجزء الأول هو البرهان على أن المسافة بين I و المستوي (P) تساوي:

$$\frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(1) (Δ) هو المستقيم الذي يمر بالنقطة I و يعامد (P) .

عين تمثيلا و سيطيا للمستقيم (Δ) بدلالة $a, b, c, d, x_I, y_I, z_I$.

(2) نسمي H نقطة تقاطع (Δ) و (P) .

(1-2) بين أنه يوجد عدد حقيقي k حيث $\vec{IH} = k\vec{n}$.

(2-2) عبر عن k بدلالة $a, b, c, d, x_I, y_I, z_I$.

(3-2) استنتج أن : $\frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

الجزء الثاني

المستوي (Q) الذي معادلته $x - y + z - 11 = 0$ يمس الكرة (S) التي مركزها $\Omega(1; -1; 3)$.

(1) عين نصف قطر الكرة (S) .

(2) اكتب تمثيلا و سيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل Ω و يعامد (Q) .

(3) استنتج احداثيات نقطة تقاطع (S) و (Q) .

التمرين 06

معادلة ديكراتية لمستوى - تمثيل وسيطي لمستقيم - المسافة بين نقطة ومستوى - تقاطع مستوى وكرة .

عين في كل حالة مما يلي الجواب الصحيح .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقطة $S(1; -2; 0)$ والمستوي (P) الذي معادلته $x + y - 3z + 4 = 0$.

(1) تمثيل وسيطي للمستقيم (D) الذي يمر بالنقطة S ويعامد (P) هو :

الجواب 1	الجواب 2	الجواب 3	الجواب 4
$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

(2) إحداثيات النقطة H تقاطع المستقيم (D) مع المستوي (P) هي :

الجواب 1	الجواب 2	الجواب 3	الجواب 4
$(-4; 0; 0)$	$\left(\frac{6}{5}; \frac{-9}{5}; \frac{-3}{5}\right)$	$\left(\frac{7}{9}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{8}{11}; \frac{-25}{11}; \frac{9}{11}\right)$

(3) المسافة بين النقطة S والمستوي (P) تساوي :

الجواب 1	الجواب 2	الجواب 3	الجواب 4
$\frac{\sqrt{11}}{3}$	$\frac{3}{\sqrt{11}}$	$\frac{9}{\sqrt{11}}$	$\frac{9}{11}$

(4) نعتبر الكرة التي مركزها S و نصف قطرها 3 . تقاطع هذه الكرة والمستوي (P) هي :

الجواب 1 : النقطة $I(1; -5; 0)$

الجواب 2 : الدائرة التي مركزها H و نصف قطرها $3 \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$

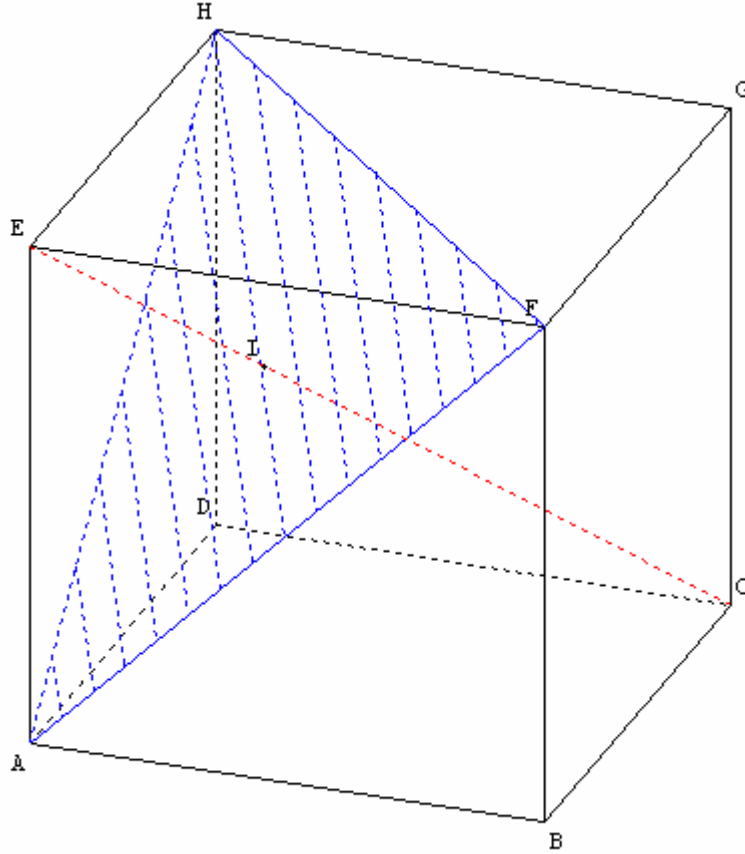
الجواب 3 : الدائرة التي مركزها S و نصف قطرها 2

الجواب 4 : الدائرة التي مركزها S و نصف قطرها $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$

التمرين 07

الجداء السلمي - التعامد .

مكعب ABCDEFGH طول حرفه a (a عدد حقيقي موجب تماما).
نسمي I نقطة تقاطع المستقيم (EC) و المستوي (AFH) .



- (1) بيّن أن المستقيم يعامد المستقيم (AG).
- (2) احسب بدلالة a الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AF}$ ، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF}$.
- (2-2) استنتج أن \overrightarrow{EC} يعامد \overrightarrow{AF} .

التمرين 08

الجداء السلمي - التعامد - أقصر مسافة بين مستقيمين .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر المستقيمين :

$$(D_2): \begin{cases} x = -6\beta \\ y = 1 + \beta \\ z = 2 + 2\beta \\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{و} \quad (D_1): \begin{cases} x = 3 - 4\alpha \\ y = -2 + \alpha \\ z = -1 + \alpha \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

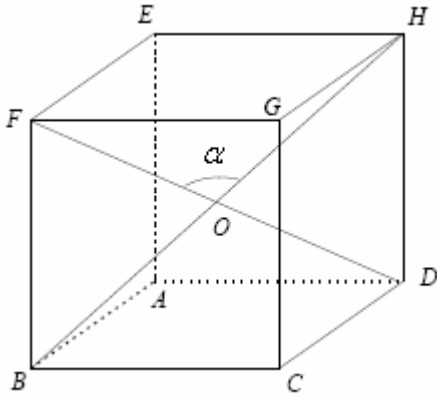
- 1) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تاذي يعامد (D_1) و (D_2) .
- 2) احسب أقصر مسافة بين المستقيمين (D_1) و (D_2) .

التمرين 09

الجداء السلمي - التعامد - المسافة بين نقطة و مستو .

$ABCDEFGH$ مكعب مركزه O و طول حرفه 1 .

نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$.



- 1) احسب BH و FD .
- 2) احسب قيمة مقربة للزاوية $\alpha = HOF$.
- 3) برهن أن المستقيم (FD) يعامد المستوي (EGB) .
- 4) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (EGB) .
- 5) احسب المسافة بين النقطة O و المستوي (EGB) .