ب- تبيان أنه من أجل $x \neq 0$ فإن $f'(x)=\dfrac{x^2}{(e^x-1)^2}\,g(x)$:

تذكير : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

من أجل $x \neq 0$:

$$f'(x)=\frac{(x^3)'(e^x-1)-(e^x-1)'\times x^3}{(e^x-1)^2}=\frac{3x^2(e^x-1)-x^3\,e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2[(3-x)\,e^x-3]}{(e^x-1)^2}=\frac{x^2}{(e^x-1)^2}\,g(x)$$

جـ- التحقق أن $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$:

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي : $(3-\alpha)e^{\alpha}-3$ ومنه : $e^{\alpha}=\dfrac{3}{3-\alpha}$ وبالتالي :

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3}{e^{\alpha}-1}=\frac{\alpha^3}{\dfrac{3}{3-\alpha}-1}=\frac{\alpha^3}{\dfrac{\alpha}{3-\alpha}}=\alpha^3\times\frac{3-\alpha}{\alpha}=\alpha^2(3-\alpha)$$

إذن : $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$.

- تعيين حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $2.82<\alpha<2.83$ ومنه : $-2.83<-\alpha<-2.82$ (الضرب في -1)

وبإضافة العدد 3 لجميع الحدود ينتج : $3-2.83<3-\alpha<3-2.82$

وبالتالي : $0.17<3-\alpha<0.18$ ... (1)

ومن : $2.82<\alpha<2.83$ نحصل على : $(2.82)^2<\alpha^2<(2.83)^2$

وبالتالي : $7.95<\alpha^2<8.01$ ... (2)

من (1) و (2) وبالضرب طرف في طرف ينتج : $1.35<\alpha^2(3-\alpha)<1.44$

إذن : $1.35<f(\alpha)<1.44$

د- جدول تغيّرات الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ ، وبالتالي فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3 أ- حساب $f(x)+x^3$:

من أجل $x \neq 0$: $f(x)+x^3=\dfrac{x^3}{e^x-1}+x^3=\dfrac{x^3\,e^x}{e^x-1}$

- استنتاج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحني الدالة $x \mapsto -x^3$:

إشارة الفرق $f(x)-(-x^3)$ أي : $f(x)+x^3$ هي إشارة الجداء $x(e^x-1)$

يمكن الاستعانة بجدول الإشارة للحصول على النتائج الآتية :

- إذا كان $x=0$ يكون $f(x)-(-x^3)=0$ ومنه (C) يقطع (C_f) في النقطة O

- إذا كان $x\neq 0$ يكون $f(x)-(-x^3)>0$ ومنه (C_f) يقع فوق (C) .

ب- تبيان أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x^3\right)=0$:

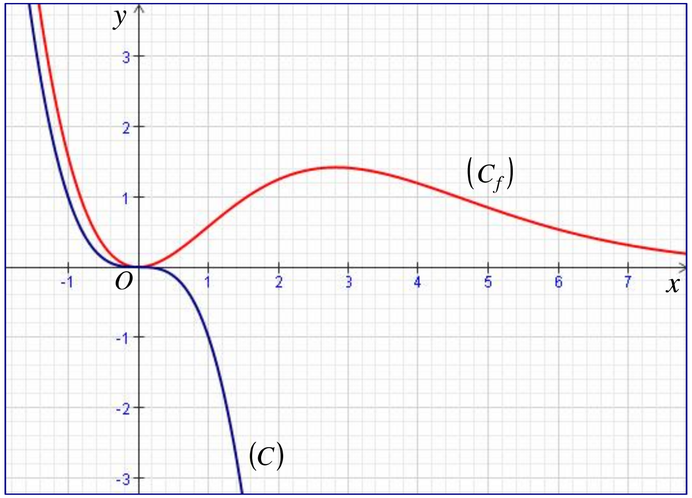
من أجل $x\neq 0$ ، لدينا : $f(x)+x^3=\dfrac{x^3}{e^x-1}+x^3=\dfrac{x^3\,e^x}{e^x-1}$

ونعلم أن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\,e^x}{e^x-1}=0$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x^3\right)=0$.

- هندسيا : المنحني (C) هو منحني مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

4 رسم (C) و (C_f) :



تصحيح التمرين بكالوريا 2010 شعبة الرياضيات

I :

1) دراسة تغيرات الدالة g :

• النهايات :

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}(3-x)e^x=-\infty$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

و لدينا : $\lim_{x\to-\infty}(3-x)e^x=\lim_{x\to-\infty}3e^x-\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$

(لأن $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$) ومنه : $\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$.

• اتجاه التغيّر :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=(3-x)'\times e^x+(e^x)'\times(3-x)=(2-x)e^x$

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $2-x$ ، نستنتج أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[2;+\infty[$.

• جدول التغيّرات : $g(2)=e^2-3$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	e^2-3	$\searrow$	$-\infty$

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α :

لدينا : $g(0)=(3-0)e^0-3=3-3=0$ ومنه 0 حل للمعادلة $g(x)=0$.

تذكير بمبرهنة القيم المتوسطة . إذا كان :

❶ g مستمرة على المجال $[a;b]$ ؛

❷ g رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ ؛

❸ $g(a)\times g(b)<0$.

فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]a;b[$.

من جدول تغيرات g نلاحظ أنها مستمرة ومتناقصة تماما على $[2.82;2.83]$

زيادة على ذلك : $g(2.82)\approx 0.06$ و $g(2.83)\approx -0.08$

وبالتالي : $g(2.82)\times g(2.83)<0$

نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2.82<\alpha<2.83$.

إذن : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha\in]2.82;2.83[$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$:

• $g(x)=0$ يكافئ $x\in\{0;\alpha\}$

• $g(x)<0$ يكافئ $x\in]-\infty;0[\cup]\alpha;+\infty[$

• $g(x)>0$ يكافئ $x\in]0;\alpha[$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الجزء II :

1) أ- تبيان أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$:

تذكير : القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه عندما يؤول x إلى a ، فإن نسبة تزايد f بين العددين a و x تؤول إلى عدد حقيقي L ، أي :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$$

لدينا : $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e^x-1}=$

ونعلم أن : $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ وبالتالي :

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}\times x=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}\times x=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{x}{e^x-1}}\times x=1\times0=0$$

إذن : الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ وعددها المشتق عند 0 هو 0 $f'(0)=0$

ب- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحني (C_f) عند المبدأ O :

تذكير : معادلة مماس المنحني الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي :

$$y=f'(a).(x-a)+f(a)$$

لدينا : $f(0)=0$ و $f'(0)=0$ وبالتالي فإن معادلة المماس (T) هي $y=0$

2) أ- تبيان أن $\lim_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=0$:

تذكير : $\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}=0$ و $\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u^n}=+\infty$ (n عدد طبيعي) .

ومنه : $\lim_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x^3}\right)}=0$.

إذن : $\lim_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=0$.

• حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=0$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

• حساب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$:

نعلم أن : $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ ومنه : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.