الحل: بسيط
النشاط الثالث
تصحيح: /
الهدف: مقاربة القاسم المشترك الأكبر.
توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " القاسم المشترك الأكبر " و يتم ضمن أفواج.
الحل: بسيط.
النشاط الرابع
تصحيح: /
الهدف: توظيف القواسم، المضاعفات، المربعات التامة، ....
توجيهات: : يقدم النشاط ضمن أفواج.
الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

الثلاثيات الفيثاغورثية
تصحيح: /
الهدف: توظيف القواسم.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط

التفكير بواسطة الحاسوب
تصحيح: /
الهدف: توظيف القواسم.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1 مجموعة قواسم العدد 20 هي : $\{-20,-10,-5,-4,-2,-1,1,2,4,5,10,20\}$.

2 مجموعة قواسم الموجبة للعدد 39 هي $\{1,3,13,39\}$

$(a,b)\in\{(1,39);(39,1);(3,13);(13,3)\}$.

3 لدينا $x^2-y^2=15$ تعني $(x-y)(x+y)=15$ ويكون العددان الصحيحان $x-y$ و $x+y$ من قواسم15.

4 أ ــ $(x-2)(y-3)=xy-3x-2y+6$.

ب ــ $xy=3x+2y$ تعني $xy-3x-2y+6=6$ أي $(x-2)(y-3)=6$ ثم نستعمل قواسم 6.

7 $-1027\le 53k\le 1112$ معناه $-19\le k\le 20$

عدد المضاعفات للعدد 53 المحصورة بين -1027 و 1112 هو 40.

8 1) $a = 7k$ و $7k < 50$ أي $k \le 7$

$a \in \{7,14,21,28,35,42,49\}$.

2) $\frac{11a}{7a} = \frac{11}{7} = \frac{33}{21}$ حيث a عدد صحيح غير معدوم ، $0 < 7a < 50$ معناه $0 < a \le 7$ وبالتالي :

$$\frac{11}{7} = \frac{22}{14} = \frac{33}{21} = \frac{44}{28} = \frac{55}{35} = \frac{66}{42} = \frac{77}{49}$$

9 13 قاسم للعدد $n+4$ معناه $n+4 = 13k$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ أي $n = 13k - 4$. $|n| \le 22$ معناه $-24 \le n \le 22$

ويكافئ $-24 \le 13k \le 22$ ومعناه $-\frac{24}{13} \le k \le \frac{22}{13}$ أي $k \in \{-1,0,1\}$ ،

ومنه $n \in \{-17,-4,9\}$.

10 $12 = 2^2 \times 4$, مجموعة قواسم 12 هي : $\mathcal{D}_{12} = \{-12,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,6,12\}$

$5n+7$	-12	-6	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6	12
$5n$	-19	-13	-11	-10	-9	-8	-6	-5	-4	-3	-1	5
n				-2				-1				1

العدد $n+6$ يقبل القسم على n معناه $n+6 = nk$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ ويكافئ $6 = n(k-1)$ إذن n يقسم 6 .

وبالتالي $n \in \{1;2;3;6\}$. وبالعكس كل القيم المعينة تحقق المطلوب .

1) $34 = 2 \times 17$ ومنه مجموعة قواسم 34 هي :

$\mathcal{D}_{34} = \{-34,-17,-2,-1,1,2,17,34\}$.

$5n+6$	-34	-17	-2	-1	1	2	17	34
$5n$	-40	-23	-8	-9	-5	-4	11	28
n	-8				-1			

2) $5n+6$ قاسم للعدد $n+8$ ومنه $5n+6$ يقسم $5n+40$ إذن $5n+6$ يقسم $(5n+40)-(5n+6)$ أي $5n+6$ يقسم 34 ومنه $n=-1$ أو $n=-8$.

وبالعكس إذا كان $n=-1$ فإن 1 يقسم 7 وإذا كان $n=-8$ فإن -34 يقسم 0 إذن كلا النتيجتين تحقق المطلوب .

14 n عدد صحيح . نضع $a = 3n+7$ و $b = 7n+2$

إذا كان العدد d قاسما لـ : a و b فإن d يقسم $7a$ و $3b$

ومنه d يقسم $7a - 3b = 49$.

15 n عدد طبيعي غير معدوما ويختلف عن العدد 1 .

$n^3 - n = n(n-1)(n+1)$. بعض القواسم للعدد $n^3 - n$: 1 ، $n-1$ ، n ، $n+1$ ، n^2-n ، n^2+n ، n^2-1 ،

$n^3 - n$

17 ليكن a و b عددن صحيحين غير معدومين .

أ) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

ب) نفرض أن $a^3+b^3=3k$ إذن

$(a+b)^3 = 3k+3a^2b+3ab^2 = 3(k+a^2b+ab^2)$

2 - القسمة الأقليدية

18 تعيين باقي القسمة الأقليدية للعدد a على b :

أ - $a=118$ و $b=5$. $118=5\times23+3$ الباقي هو 3 .
ب - $a=152$ و $b=7$. $152=7\times21+5$ الباقي هو 5 .
جـ - $a=-118$ و $b=5$. $-118=5(-24)+2$
د - $a=-152$ و $b=7$. $-152=7(-22)+2$

19 عين الأعداد الطبيعية $n=41k+5$ مع $41k+5<100$ أي $k\le2$ ومنه $n\in\{5,46,87\}$

20 a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a=17b+3$ و $b>3$ و $a=23b+27$ ،
إذن $6b-24=0$ ومنه $b=4$ و $a=71$

21 n عدد طبيعي ، بقسمته على 7 أو على 3 نجد نفس الباقي أي $n=7k+r$ و $n=3k'+r$ مع $0\le r<3$.
$n-r$ يقبل القسمة على 3 و 7 وهما عددان أوليان ،
إذن موجودين في تحليله وبالتالي 21 يكون قاسم له ،
أي $n-r=21\alpha$ معناه $n=21\alpha+r$ بما أن $0\le r<3$
فإن $n=21\alpha$ ، $n=21\alpha+1$ أو $n=21\alpha+2$ ، $\alpha\in\mathbb{N}$.

24 a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث :

$a+b=416$ و $a=bk+61$ مع $b>61$.

ومنه $bk+61+b=416$ أي $b(k+1)=355$ إذن b قاسم للعدد 355 ولدينا $355=5\times71$.قواسم 355 هي 1، 5، 71 و 355 بما أن $b>61$ فإن $b=71$ أو $b=355$.

إذا كان $b=71$ فإن $a=416-71=345$.

إذا كان $b=355$ $a=416-355=61$.

25 استعمال خوارزمية أقليدس لتعيين $PGCD(a,b)$:

أ - $a=315$ و $b=117$. $315=117\times2+81$
$117=81\times2+36$ ؛ $81=36\times2+9$ ؛ $36=9\times4+0$. ومنه $PGCD(315,117)=9$.

ب - $a=1260$ و $b=528$. $1260=528\times2+204$ ؛ $528=204\times2+120$ ؛ $204=120\times1+84$ ؛
$120=84\times1+36$ ؛ $84=36\times2+12$ ؛ $36=12\times3+0$ ومنه $PGCD(1260,528)=12$.

جـ - $a=1380$ و $b=972$.
$1380=972\times1+408$ ؛ $972=408\times2+156$ ؛
$408=156\times2+96$ ؛ $156=96\times1+60$ ؛ $96=60\times1+36$ ؛ $60=36\times1+24$ ؛ $36=24\times1+12$ ؛
$24=12\times2+0$ ومنه $PGCD(1380,972)=12$.

26 n عدد طبيعي غير معدوم .

$PGCD\left(n^2,n\right)=n$ ؛ $PGCD\left(3n,n\right)=n$

27 البرهان أن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة قواسم العدد $p\gcd(a,b)$.

نضع $\delta = p\gcd(a,b)$.

كل عدد d قاسم للعدد δ هو قاسم للعددين a و b لأن δ يقسم a و b.

العكس نفرض أن d قاسم للعددين a و b ومنه $a=\alpha d$ و $b=\beta d$ مع α و β عددين طبيعيين غير معدومين .

إذا كان $p\gcd(\alpha,\beta)=1$ فإن $p\gcd(a,b)=d$ ومنه $d=\delta$ وبالتالي d يقسم δ .

إذا كان $p\gcd(\alpha,\beta)=\lambda$ مع $\lambda\neq 1$ فإنه يوجد عددين طبيعيين غير معدومين وأوليين فيما بينهما α' و β' حيث

$\alpha=\lambda\alpha'$ و $\beta=\lambda\beta'$ ومنه $a=d\lambda\alpha'$ و $b=d\lambda\beta'$ إذن $p\gcd(a,b)=d\lambda$ ومنه $\delta=d\lambda$ ومنه d يقسم δ.

28

	1	1	2	1	4	
792	456	336	120	96	24	0

إذن $PGCD\left(792,456\right)=24$. لدينا $24=2^3\times 3$.

ومنه مجموعة القواسم المشتركة للعددين 456 و 792 هي:

$\mathcal{D}_{24}=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$.

29 –

	1	2	5	
448	308	140	28	0

إذن $PGCD\left(448,308\right)=28$. لدينا $28=2^2\times 7$

-مجموعة القواسم المشتركة للعددين 448 و 308 هي : $\mathcal{D}_{28}=\{1,2,4,7,14,28\}$.

$4294=nk+10$ و $3521=nk'+11$ ومنه

$4284=nk$ و $3510=nk'$ إذن n هو قاسم للعددين 4284 و 3510 .

	1	4	1	1	6	1	2	
4284	3510	774	414	360	54	36	18	0

$PGCD\left(4284,3510\right)=18$ ولدينا : $18=2\times 3^2$.

إذن $n\in\{1,2,3,6,9,18\}$.

31 n عدد طبيعي مكون من أربعة أرقام حيث:

$21685=nk+37$ و $33509=nk'+53$

ومنه $21648=nk$ و $33456=nk'$

إذن n هو قاسم للعددين 21648 و 33456 لدينا $PGCD\left(33456,21648\right)=12\times PGCD\left(2788,1804\right)$

	1	1	1	5	
2788	1804	984	820	164	0

$PGCD\left(33456,21648\right)=12\times 164=1968$

$1968=2\times 984$ إذن القاسم الوحيد المكون من أربعة أرقام للعدد $PGCD\left(33456,21648\right)$ هو نفسه ؛

إذن $n=1968$.

32 (1

	1	2	4	

182	126	56	14	0

إذن $PGCD\,(182,126)=14$.

2) استعمال خوارزمية أقليدس :

$182=126\times1+56$ معناه $182-126=56$

$126=56\times2+14$ معناه $126-56\times2=14$

إذن : $14=126-56\times2=126-(182-126)\times2$ أي $14=182(-2)+126\times3$. إذن $\alpha=-2$ و $\beta=3$.

3 ـ خواص القاسم المشترك الأكبر

33 $1399=82\times17+5$ ومنه الباقي هو 5 .

$PGCD\,(1399,82)=PGCD\,(82,5)=1$

34 تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b:

أ - $a=-350$ و $b=-252$.

$PGCD\,(-350,-252)=PGCD\,(350,252)=14$

ب - $a=126$ و $b=-735$.

$PGCD\,(126,-735)=PGCD\,(126,735)=21$

جـ - $a=-138$ و $b=575$.

$PGCD\,(-138,575)=PGCD\,(138,575)=23$

35 $PGCD\,(54,82)=2$

$PGCD\,(5400,8200)=100PGCD\,(54,82)=200$.

من التمرين 36 إلى التمرين 41 ، عيّن كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين المقترحين.

نضع : $PGCD\,(a,b)=d$ ونطبق الخاصية $a=da'$ ، $b=db'$ مع a' و b' أوليين فيما بينهما .

36 $\begin{cases}a+b=54\\PGCD\,(a,b)=9\end{cases}$ معناه $\begin{cases}9(a'+b')=54\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$

ومعناه $\begin{cases}a'+b'=6\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$ ويكافئ (a',b') تنتمي إلى $\{(1,5);(5,1)\}$ أي $(a,b)\in\{(9,45);(45,9)\}$.

37 $\begin{cases}a+b=72\\PGCD\,(a,b)=9\end{cases}$ ؛ $(a,b)\in\{(9,63);(27,45);(45,27);(63,9)\}$

38 $\begin{cases}a+b=420\\PGCD\,(a,b)=84\end{cases}$ ؛ $(a,b)\in\{(84,336);(168,252);(252,168);(336,84)\}$

39 $\begin{cases}ab=360\\PGCD\,(a,b)=6\end{cases}$ معناه $\begin{cases}36a'b'=360\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$

ومعناه $\begin{cases}a'b'=10\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$ ويكافئ $(a',b')\in\{(1,10);(2,5);(5,2);(10,1)\}$ أي

$(a,b)\in\{(6,60);(12,30);(30,12);(60,6)\}$

40 $\begin{cases} ab = 2700 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$ ؛ $(a,b) \in \{(5,540);(20,135);(20,135);(540,5)\}$

41 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$ معناه $(a,b) = (85,80)$ أو $(a,b) = (35,28)$.

42 أ - $a = 55$ و $b = 36$ ؛ $PGCD(36,55) = 1$.

ب- $a = 14$ و $b = 165$ ؛ $PGCD(165,14) = 1$.

جـ - $a = 1155$ و $b = 872$؛ $PGCD(1155,872) = 1$

في كل حالة نقول أن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

43 1) $PGCD(140,143) = 1$

2) استنتج في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ — $\begin{cases} a = 140 \times 34 \\ b = 143 \times 34 \end{cases}$ و $PGCD(140,143) = 1$ معناه $PGCD(a,b) = 34$.

ب — $\begin{cases} a = 143 \times 82 \\ b = 140 \times 82 \end{cases}$ و $PGCD(140,143) = 1$ معناه $PGCD(a,b) = 82$.

44 لأن 7 لا يقسم 500.

تمارين للتعمق

1 - قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

45 المسافة بين العمودين المتتاليين هي عدد طبيعي x حيث $2 < x < 5$ وبالتالي : إمّا $x = 3$ وإما $x = 4$. لدينا 4 لا يقسم 90 بينما 3 هو قاسم مشترك للعددين 90 و 156 ، ونأخذ قاسما مشتركا لأن كل زاوية القطعة يغرس عمود. إذن المسافة بين عموديين متتاليين هي $3m$.

محيط القطعة هو $2(90+156) = 492m$ ولدينا عدد الأعمدة هو نفس عدد الفراغات الموجودة بين عمودين متتاليين أي $\frac{492}{3} = 164$

46 قواسم 220 هي : 1، 2، 4، 5، 10، 11، 20، 22، 44، 55، 110، 220.

$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 =$
284

قواسم 284 هي : 1 ، 2 ، 4 ، 71 ، 142 ، 284 .

$1+2+4+71+142 = 220$.

47 ليكن n عددا طبيعيا أكبر من أو يساوي 3.

لدينا $n+5 = n-2+7$ ومنه $n+5$ مضاعف لِـ $n-2$

معناه $n-2$ قاسم للعدد 7 وبالتالي $n-2 = 1$ أو $n-2 = 7$ أي $n = 3$ أو $n = 9$.

عكسيا إذا كان $n=3$ أو $n=9$ فإن $n+5=8$ أو $n+5=14$ و $n-2=1$ أو $n-2=7$ وبالتالي في كلا الحالتين $n+5$ مضاعف لـِ $n-2$.

48 1) قواسم 8 هي 1 ، 2 ، 4 ، 8 ؛ ومنه مجموع قواسم العدد 8 هو : 15.

قواسم 81 هي 1 ، 3 ، 9 ، 27 ، 81 ؛ ومنه مجموع قواسم العدد 81 هو : 121.

2) عدد قواسم 8 هو 4 وعدد قواسم 81 هو 5 إذن عدد قواسم العدد 8×81 هو $4\times 5=20$.

49 1) $\dfrac{n+2}{n-1}=\dfrac{n-1+3}{n-1}=\dfrac{n-1}{n-1}+\dfrac{3}{n-1}$

$\dfrac{n+2}{n-1}=1+\dfrac{3}{n-1}$ وبالتالي لكي يكون $\dfrac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا يكفي أن يكون $\dfrac{3}{n-1}$ عددا صحيحا ولهذا يجب أن يكون العدد $(n-1)$ قاسما للعدد 3.

قواسم العدد 3 هي -1 ، -3 ، 1 و 3 وبالتالي $(n-1=-1)$ ، $(n-1=-3)$ ، $(n-1=1)$ أو $(n-1=3)$

معناه $(n=0)$ ، $(n=-2)$ ، $(n=2)$ أو $(n=4)$ وبما أن $n\in\mathbb{N}$ فإن قيمه الممكنة هي : 0 ، 2 و 4.

2) ليكن α و β عددين طبيعيين حيث $a=2^{\alpha}\times 3^{\beta}$ ومنه $a^2=2^{2\alpha}\times 3^{2\beta}$ عدد قواسم a^2 هو $(2\alpha+1)(2\beta+1)$

وعدد قواسم a هو $(\alpha+1)(\beta+1)$ ومن المعطيات لدينا : $(2\alpha+1)(2\beta+1)=3(\alpha+1)(\beta+1)$ معناه

$4\alpha\beta+2\alpha+2\beta+1=3\alpha\beta+3\alpha+3\beta+3$ ومعناه $\alpha\beta-\alpha=\beta+2$ يكافئ $\alpha(\beta-1)=\beta+2$ أي

$\alpha=\dfrac{\beta+2}{\beta-1}$. وحسب السؤال السابق ينتج أن $\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=4\end{cases}$ أو $\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=2\end{cases}$ ؛ إذن $a=2^2\times 3^4=324$ أو $a=2^4\times 3^2=144$.

50 $xy-4y-12=0$ إذا كان $x=4$ فإن المعادلة تصبح $-12=0$ وهذا غير ممكن إذن $x\neq 4$.

$xy-4y-12=0$ معناه $y=\dfrac{12}{x-4}$ ومنه $x-4$ يقسم 12 ولدينا $12=2^2\times 3$.

$x-4$	−12	−6	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4	6	12
x	−8	−2	0	1	2	3	5	6	7	8	10	16
y	−1	−2	−3	−4	−6	−12	12	6	4	3	2	1

51 1) ليكن $x\in[-3;1[\cup]1;3]$

$$f(x)=\frac{2x^2-3x-3}{x-1}=\frac{2x^2-3x+1-4}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{(x-1)(2x-1)}{x-1}-\frac{4}{x-1}=2x-1-\frac{4}{x-1}$$

2) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوي إحداثيتيها أعداد صحيحة . $M\in C_f$ معناه $x\in[-3;1[\cup]1;3]$

و $y=2x-1-\dfrac{4}{x-1}$ أي $y-2x+1=-\dfrac{4}{x-1}$.

إذن $x-1$ يقسم 4

$x-1$	−4	−2	−1	1	2	4
$y-2x+1$	1	2	4	−4	−2	−1
x	−3	−1	0	2	3	$\cancel{5}$

y	-6	-1	3	-1	3	8

52 n عدد طبيعي . نضع $a=n\left(n^2+5\right)$.

1) إذا كان n عددا زوجيا فإن a عدد زوجي.

إذا كان n عددا فرديا فإن $n=2k+1$ ومنه $n^2+5=4k^2+4k+6$ وهو عدد زوجي إذن a عدد زوجي.

2) بنفس الطريقة نميز الحالات $n=3k$ ، $n=3k+1$ ، $n=3k+2$.

53 a عدد طبيعي؛ للبرهان أن العدد $a\left(a^2-1\right)$ مضاعف للعدد 6 يكفي أن نبرهن $a\left(a^2-1\right)$ مضاعف لِـ 2 و 3 لأن 2 و 3 أوليان فيما بينهما ثم نميز الحالات.

54 رقم آحاد العدد n^5-n هو 0 معناه n^5-n يقبل القسمة على 10 ولدينا من بين القواسم للعدد 10 قاسمين أوليين فقط هما 2 و 5.

$n^5-n=n\left(n^4-1\right)=n\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)$ أي $n^5-n=n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n^2+1\right)$.

لدينا $n\left(n+1\right)$ هو جداء عددين طبيعيين متواليين إذن هو عدد زوجي أي مضاعف لِـ 2 .

n^5-n مضاعف لِـ $n\left(n+1\right)$, و $n\left(n+1\right)$ مضاعف لِـ 2 إذن n^5-n مضاعف لِـ2 .

لدينا كل عدد طبيعي n هو إماّ مضاعفا لِـ 5 وإما ليس مضاعفا لِـ 5.

إذا كان n مضاعفا لـِ 5, بما أن n^5-n مضاعف لـِ n فإن n^5-n مضاعف لـِ 5 .

إذا كان n ليس مضاعفا لـِ 5 فإن بواقي قسمته على 5 هي 1 ، 2 , 3 , 4 .

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو 1 فإن $n-1$ يكون مضاعف لـ 5 وبما أن n^5-n مضاعف لـِ $n-1$ فإنه يكون مضاعف لـ 5.

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو 4 فإن $n+1$ يكون مضاعف لـ 5 وبما أن n^5-n مضاعف لـِ $n+1$ فإنه يكون مضاعف لـ 5.

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو r حيث $r\in\{2;3\}$ فإن $n=5k+r$ ومنه $n^2=25k^2+10k+r^2$

أي $n^2+1=5\left(5k^2+2k\right)+r^2+1$

وبالتالي إذا كان $r\in\{2;3\}$ فإن $n^2+1=5\left(5k^2+2k\right)+5$ أو $n^2+1=5\left(5k^2+2k\right)+10$ إذن في الحالتين n^2+1 مضاعف لـِ 5 وبما أن n^5-n مضاعف لـ n^2+1 فإن n^5-n مضاعف لـ 5 .

إذن من أجل كل عدد طبيعي n، n^5-n مضاعف لـ 5. وبالتالي تحليل العدد n^5-n يشمل العددين الأوليين 2 و 5

إذن n^5-n هو مضاعف للعدد 10 .

n^{p+1} و n^{p+5} لهما نفس رقم الآحاد معناه أن رقم آحاد $n^{p+5}-n^{p+1}$ هو 0. $n^{p+5}-n^{p+1}=n^p\left(n^5-n\right)$ ومنه $n^{p+5}-n^{p+1}$ مضاعف للعدد 10.

55 للبرهان أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون n^7-n يقبل القسمة على 14 يكفي أن نبرهن أنه يقبل القسمة على 2 وعلى 7 لأن 2 و 7 أوليان فيما بينهما.

56 1) من أجل كل عدد طبيعي n ، $a=n^2+5n+4=\left(n+1\right)\left(n+4\right)$ و $b=n^2+3n+2=\left(n+1\right)\left(n+2\right)$

إذن العدد $n+1$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .

2) لدينا $3n^2+15n+20=(n+1)(3n+12)+8$

إذن العدد $n+1$ قاسما للعدد $3n^2+15n+20$ معناه العدد $n+1$ قاسما للعدد 8 ومنه $n+1\in\{1;2;4;8\}$ أي $n\in\{0;1;3;7\}$.

وعكسيا بتعويض n بقيم المجموعة $\{0;1;3;7\}$ نجد العدد $n+1$ قاسما للعدد $3n^2+15n+20$

57 n و a عددان صحيحان حيث a يقسم $n-1$ و n^2+n+3 .

أ - لدينا $n^2-2n+1=(n-1)^2$ و a يقسم $n-1$ إذن a يقسم $(n-1)^2$ أي a يقسم n^2-2n+1 .

ب - a يقسم n^2+n+3 و n^2-2n+1 إذن a يقسم الفرق $(n^2+n+3)-(n^2-2n+1)$ أي يقسم $3n+2$.

جـ - a يقسم $n-1$ ومنه a يقسم $3n-3$ وبما أن a يقسم $3n+2$ فإنه يقسم الفرق $(3n+2)-(3n-3)$ أي a يقسم 5 .

د - $a\in\{-5;-1;1;5\}$.

58 نفترض أن الثنائية $(x\,;y)$ يكون من أجلها العدد xy قاسما للعدد $x+y$ إذن $x\neq 0$ و $y\neq 0$

ولدينا $x+y=xyk$ مع $k\in\mathbb{N}$ إذن $x=y(xk-1)$ و $y=x(yk-1)$ وبالتالي x يقسم y و y يقسم x إذن $x=y$ وبالتالي يصبح $2x=x^2k$ أي $2=xk$ ومنه x يقسم 2 إذن $x=y=1$ أو $x=y=2$.

وبالعكس الثنائيتين $(1,1)$ و $(2,2)$ تحققان المطلوب.

59 n عدد طبيعي فردي . S مجموع أعداد طبيعية متتابعة وعددها n . نعتبر العدد الطبيعي a ونضع $S=a+(a+1)+(a+2)+...+(a+n-1)$ هو مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها 1 .

$$S=\frac{n}{2}(a+(a+n-1))=n\left(a+\frac{n-1}{2}\right)$$

بما أن n عدد طبيعي فردي فإن $n-1$ هو زوجي وبالتالي $\frac{n-1}{2}$ يكون عدد طبيعي ومنه $k=a+\frac{n-1}{2}$ هو عدد طبيعي ومنه $S=nk$ مع $k\in\mathbb{N}$ إذن العدد S يقبل القسمة على n .

2 - القسمة الأقليدية

66 $71=0\times72+71$ إذن باقي القسمة الأقليدية للعدد 71 على 72 هو 71 .

67 كتاب مكتوب عليه 4350 سطرا . كل صفحة تحمل 34 سطرا ماعدا الصفحة الأخيرة ناقصة .

$4350=34\times127+32$ إذن توجد بالكتاب 127 صفحة كاملة والصفحة الأخيرة مكتوب عليها 32 سطرا فقط .

68 علما أنه يوجد عدد طبيعي k حيث $100^{100}=13k+35$. ولدينا $100^{100}=13k+26+9$

أي $100^{100}=13(k+2)+9$ بما أن $9<13$ فإن باقي قسمة 100^{100}على 13 هو 9.

69 الباقيان للقسمة الأقليدية لكل من العددين m و n على 17 هما على التوالي 8 و 12. أي $m=17k+8$ و $n=17p+12$ مع $k\in\mathbb{N}$ و $p\in\mathbb{N}$.

$$m+n=17(k+p)+20=17(k+p+1)+3$$

إذن باقي قسمة $m+n$ على 17 هو 3 .

$m\times n=(17k+8)(17p+2)$

$m\times n=17^2kp+17(2k+8p)+16$

$m\times n=17(17kp+2k+8p)+16$

إذن باقي قسمة $m\times n$ على 17 هو 16 .

$m^2=(17k)^2+16\times 17k+64$

$m^2=17(17k^2+16k+3)+13$.

إذن باقي قسمة m^2 على 17 هو 13.

79 $2^{3\times 0}-1=0$ وهو يقبل القسمة على 7 .

نفرض $2^{3p}-1$ يقبل القسمة على 7أي $2^{3p}-1=7k$ مع $k\in\mathbb{N}$ ولنبرهن $2^{3(p+1)}-1$ يقبل القسمة على 7 .

$2^{3(p+1)}-1=8\times 2^{3p}-1=8(7k+1)-1=56k+7$

أي $2^{3(p+1)}-1=7(8k+1)$ومنه $2^{3(p+1)}-1$ يقبل القسمة على 7. إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $2^{3n}-1$ يقبل القسمة على 7.

أ - من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $2^{3n}-1=7k$ مع $k\in\mathbb{N}$

أي $2^{3n}=7k+1$ إذن الباقي هو 1.

ب - $a=2^{3n+1}=2(7k+1)=7(2k)+2$ إذن الباقي 2.

جـ - $a=2^{3n+2}=4(7k+1)=7(4k)+4$ الباقي هو 3.

80 إذا كان d قاسما مشتركا للعددين a و b فهو قاسم a^2 وبالتالي هو قاسم للعدد a^2+b ومنه d يكون قاسما مشتركا a و (a^2+b).

إذا كان d قاسما مشتركا للعددين a و (a^2+b)فهو قاسم a^2 وبالتالي هو قاسم للعدد $(a^2+b)-a^2$أي قاسم للعدد b ومنه d يكون قاسما مشتركا للعددين a و b .

نستنتج من هذا أن القواسم المشتركة للعددين a و (a^2+b) هي نفس القواسم المشتركة للعددين a و b .

وبالأخص $PGCD(a;a^2+b)=PGCD(a;b)$.

2) كل قاسم مشترك للعددين a و b هو قاسم لكل من الأعداد : $a+b$ ، $2a$ ، $3b$ و $2a+3b$

إذن كل قاسم مشترك للعددين a و b هو قاسم مشترك للعددين $a+b$ و $2a+3b$.

وبالعكس لدينا كل قاسم مشترك للعددين $a+b$ و $2a+3b$ هو قاسم لكل من الأعداد $3(a+b)$ ، $2(a+b)$ ،

$(2a+3b)$ ولدينا $3(a+b)-(2a+3b)=a$ و $(2a+3b)-2(a+b)=b$

إذن كل قاسم مشترك للعددين $a+b$ و $2a+3b$ هو قاسم مشترك للعددين a و b

نستنتج من هذا أن القواسم المشتركة للعددين $a+b$ و $2a+3b$ هي نفس القواسم المشتركة للعددين a و b .

وبالأخص $PGCD(a+b;2a+3b)=PGCD(a;b)$.

81 n عدد طبيعي . $a=11n+3$ و $b=13n-1$.

1) $13a-11b=13(11n+3)-11(13n-1)$

$13a-11b=143n+39-143n+11=50$.

2) $PGCD(a;b)$ يقسم $13a$ و $11b$ والفرق $13a-11b$ أي $PGCD(a;b)$ يقسم 50 .لدينا $50=2\times5^2$, إذن $PGCD(a;b)$ ينتمي إلى المجموعة $\{1,2,5,10,25,50\}$.

3) تعيين ثنائية $(a;b)$ بحيث يكون $PGCD(a;b)=50$.

50 يقسم a و b ومنه يقسم $6a$ و $5b$ وكذلك $6a-5b$

أي 50 يقسم $n+23$ ومعناه $n+23=50k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

ومعناه $n=50k-23$ وبأخذ $k=1$ نجد $n=27$ ومنه $(a;b)=(300;350)$

وبالعكس $a=300=6\times50$ و $b=350=7\times50$ ولدينا 6 و 7 أوليان فيما بينهما إذن $PGCD(a;b)=50$

82 $\begin{cases}2a^2+b^2=20992\\PGCD(a;b)=16\end{cases}$ معناه توجد $(a';b')$ من $\mathbb{N}^{*2}$ حيث $a=16a'$, $b=16b'$ ؛ a' و b' أوليان فيما بينهما

من الفرضية الأولى نحصل على $2a'^2+b'^2=82$ ومعناه $b'^2=2(41-a'^2)$ إذن يجب $a'^2<41$

a'^2	1	4	9	16	25	36
b'^2	80	74	64	50	32	10

إذن الثنائية الوحيدة $(a';b')$ هي $(3,8)$ ومنه $(a;b)=(48,128)$

83 a و b عددان من $\mathbb{N}^*$ و $PGCD(a;b)=d$.

توجد $(a';b')$ من $\mathbb{N}^{*2}$ حيث $a=da'$, $b=db'$ ؛ a' و b' أوليان فيما بينهما ؛ $ab+5d^2=35d$ تصبح

$d^2(a'b'+5)=35d$ معناه $d(a'b'+5)=35$ ومنه d يقسم 35و $a'b'=\dfrac{35}{d}-5$ ؛ قواسم 35 هي: $1,5,7,35$

إذا كان $d=35$ أو $d=7$ فإن $a'b'\le 0$ وهذا مرفوض

إذا كان $d=1$ فإن $a'b'=30$ ولدينا $30=2\times3\times5$

ومجموعة قواسم 30 هي : $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ ومنه : $(a';b')\in\{(1,30);(2,15);(3,10);(5,6);(6,5);(10,3);(15,2);(30,1)\}$

إذا كان $d=5$ فإن $a'b'=2$ ؛ $(a';b')\in\{(1,2);(2,1)\}$ ومنه $(a;b)\in\{(5,10);(10,5)\}$.

خلاصة : $(a;b)\in\{(1,30);(2,15);(3,10);(5,6);(6,5);(10,3);(15,2);(30,1);(5,10);(10;5)\}$.

84 1) ليكن d قاسما مشتركا لــ a ، b إذن هو قاسم لكل من $7a$, $5b$, $4a$ و $3b$ وبالتالي d يقسم $7a-5b$, $5b-7a$, $4a-3b$ و $3b-4a$ أي d قاسم مشترك لـ $|x|$ و $|y|$.

العكس ليكن d قاسما مشتركا لـ x و y إذن هو قاسم لكل من $4x$, $7y$, $3x$ و $5y$ وبالتالي d قاسم للفرقين $4x-7y$ و $3x-5y$

لدينا $4x-7y=4(7a-5b)-7(4a-3b)=b$ و $3x-5y=3(7a-5b)-5(4a-3b)=a$

إذن d قاسم مشترك لـ a ، b .

ومنه: مجموعة القواسم المشتركة للعددين a، b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين x و y ؛ وبالأخص $PGCD(|x|;|y|)=PGCD(x;y)=PGCD(a;b)$.

2) $(1)\ldots\begin{cases}(7\alpha-5\beta)(4\alpha-3\beta)=1300\\PGCD(\alpha;\beta)=5\end{cases}$

نضع : $x=7\alpha-5\beta$ و $y=4\alpha-3\beta$. وحسب السؤال 1) يكون $\alpha=3x-5y$ و $\beta=4x-7y$

ومنه $PGCD(x;y)=PGCD(\alpha;\beta)=5$. إذن (1) تصبح $\begin{cases} xy=1300 \\ PGCD(x;y)=5 \end{cases}$

$PGCD(x;y)=5$ معناه يوجد x' و y' عددان صحيحان غير معدومين حيث $|x'|$ و $|y'|$ و $x=5x'$ و $y=5y'$

ومنه $25x'y'=1300$ أي $x'y'=52$

$52=2^2\times13$ وقواسمه هي 1, 2, 4, 13, 26 و 52

x'	-52	-13	-2	-1	1	2	13	52
y'	-1	-2	-13	-52	52	13	2	1
x	-260	-65	-10	-5	5	10	65	260
y	-5	-10	-65	-260	260	65	10	5
α	-755	-145	295	1285	-1285	-295	145	755
β	-1005	-190	415	1800	-1800	-415	190	1005

$(\alpha;\beta)\in\{(295,415);(1285,1800);(145,190);(755,1005)\}$

من التمرين 85 إلى التمرين 88 ، برهن من أجل كل عدد طبيعي n ، أنّ العددين a و b أوليان فيما بينهما .

85 $a=n+3$ و $b=2n+7$.

d يقسم a و b إذن يقسم $2a$ وكذلك $b-2a$ ولدينا : $b-2a=1$ إذن d يقسم 1 ومنه $d=1$.

86 $a=3n+4$ و $b=8n+11$.

d يقسم a و b إذن يقسم $8a$ و $3b$ وكذلك $3b-8a$ ولدينا : $3b-8a=1$ إذن d يقسم 1 ومنه $d=1$.

87 $a=9n+7$ و $b=5n+4$.

d يقسم a و b إذن يقسم $5a$ و $9b$ وكذلك $9b-5a$ ولدينا : $9b-5a=1$ إذن d يقسم 1 ومنه $d=1$.

88 $a=7n^2+2$ و $b=4n^2+1$.

d يقسم a و b إذن يقسم $4a$ و $7b$ وكذلك $4a-7b$ ولدينا : $4a-7b=1$ إذن d يقسم 1 ومنه $d=1$.

89 n عدد طبيعي غير معدوم .

1) نضع $PGCD(2n-1;9n+4)=d$ إذن d يقسم $(9n+4)$ و $(2n-1)$ ومنه d يقسم $2(9n+4)$ و $9(2n-1)$ إذن d يقسم $2(9n+4)-9(2n-1)$

بما أن $2(9n+4)-9(2n-1)=17$ فإن d يقسم 17 أي $d=1$ أو $d=17$.

2) إذا كان $PGCD(2n-1;9n+4)=17$ فإن 17 يقسم $(9n+4)$ و $(2n-1)$ ومنه 17 يقسم $4(2n-1)$

إذن 17 يقسم الفرق $(9n+4)-4(2n-1)=n+8$.

3) إذا كان $PGCD(2n-1;9n+4)=17$ فإن 17 يقسم $n+8$ ومنه $n=17\alpha-8$ مع $\alpha\in\mathbb{N}^*$.

لنبرهن العكس , نفرض أن $n=17\alpha-8$ مع $\alpha\in\mathbb{N}^*$

ومنه $9n+4=9(17\alpha-8)+4=9\times17\alpha-68$ و $2n-1=2(17\alpha-8)-1=2\times17\alpha-17$

أي : $9n+4=17(9\alpha-4)$ و $2n-1=17(2\alpha-1)$

نضع $PGCD(2\alpha-1;9\alpha-4)=\delta$ إذن δ يقسم $(2\alpha-1)$ و $(9\alpha-4)$ ومنه δ يقسم $9(2\alpha-1)$

و $2(9\alpha-4)$ إذن δ يقسم $2(9\alpha-4)-9(2\alpha-1)$

أي δ يقسم 1 وبالتالي $\delta = 1$.

$PGCD(2\alpha - 1; 9\alpha - 4) = 1$ ، $9n + 4 = 17(9\alpha - 4)$ و $2n - 1 = 17(2\alpha - 1)$ معناه

$PGCD(2n - 1; 9n + 4) = 17$.

خلاصة : $n = 17\alpha - 8$ مع $\alpha \in \mathbb{N}^*$ معناه $PGCD(2n - 1; 9n + 4) = 17$.

90 n عدد طبيعي .

نضع $a = 5n^2 + 14n + 14$ ، $b = n + 2$ و $c = 5n + 3$.

1) لدينا $5n^2 + 14n + 8 = (n + 2)(5n + 4)$ ومنه b قاسم للعدد $5n^2 + 14n + 8$.

2) b يقسم a إذن b يقسم $a - (5n^2 + 14n + 8)$ أي b يقسم 6 .

وبالعكس ، نفرض أن b يقسم 6 بما أن b يقسم $5n^2 + 14n + 8$ فإنه يقسم المجموع $5n^2 + 14n + 8 + 6$ أي b يقسم a.

خلاصة : b يقسم a معناه b يقسم 6 .

3) b يقسم 6 معناه $n + 2 = 1$ أو $n + 2 = 2$ أو $n + 2 = 3$ أو $n + 2 = 6$ ومعناه $n = 0$ أو $n = 1$ أو $n = 4$.

ـــ إذا كان $n \in \{0,1,4\}$ فإن b يقسم 6 أي b يقسم a ومنه باقي قسمة a على b هو 0 .

ـــ إذا كان $n = 2$ فإن $a = 62$ و $b = 4$ إذن الباقي 2.

ـــ إذا كان $n = 3$ فإن $a = 101$ و $b = 5$ إذن الباقي 1.

ـــ إذا كان $n > 4$ فإن $b > 6$ ولدينا $a = bc + 6$ إذن باقي قسمة a على b هو 6 .

$c = 5n + 3$ ؛

ـــ إذا كان $n = 0$ فإن $a = 14$ و $c = 3$ ومنه باقي قسمة a على c هو 2 .

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $c > 6$ ولدينا $a = cb + 6$ إذن باقي قسمة العدد a على c هو 6 .

91 1) $n \in \mathbb{Z} - \{1\}$ نضع : $a = 3n + 5$ و $b = n - 1$.

أ - لدينا $a - 3b = 3n + 5 - 3n + 3 = 8$ إذن $a = 3b + 8$

ب - $\frac{a}{b} = 3 + \frac{8}{b}$. $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا معناه b يقسم 8

أي : $b \in \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\}$ معناه $n \in \{-7; -3; -1; 0; 2; 3; 5; 9\}$

2) نفرض أن n عدد طبيعي .

أ - نضع $PGCD(a; b) = d$. d يقسم a و b إذن يقسم $3b$ ومنه يقسم $a - 3b$ وبالتالي d يقسم 8 .

ب - إذا كان $n = 8k$ فإن d يقسم n ومنه d يقسم $n - b$ أي d يقسم 1 وبالتالي $d = 1$.

ـــ إذا كان $n = 8k + 1$ فإن $a = 8(3k + 1)$ و $b = 8k$ إذن 8 يقسم d وبما أن d يقسم 8 فإن $d = 8$.

ـــ إذا كان $n = 8k + 2$ فإن $a = 24k + 11$ و $b = 8k + 1$ بما أن d يقسم 8 , و a و b فرديان فإن $d = 1$.

ـــ إذا كان $n = 8k + 3$ فإن $a = 2(12k + 7)$ و $b = 2(4k + 1)$ ؛ نضع $d' = PGCD(12k + 7; 4k + 1)$ d' يقسم $3(4k + 1)$ ومنه يقسم $12k + 7 - 3(4k + 1)$ أي يقسم 4 وبالتالي d' يقسم $4k$ و $4k + 1$ إذن يقسم فرقهما 1

وبالتالي $d' = 1$ إذن $d = PGCD(a; b) = 2$.

ـــ إذا كان $n = 8k + 4$ فإن $a = 24k + 17$ و $b = 8k + 3$

a و b فرديان بما أن d يقسم 8 فإن $d=1$.

ـــ إذا كان $n=8k+5$ فإن $a=4(3k+5)$ و $b=4(2k+1)$ ؛ إذا كان $d=8$ فإن $2k+1$ يقبل القسمة على 2 وهذا تناقض إذن $d=4$.

ـــ إذا كان $n=8k+6$ فإن $a=24k+23$ و $b=8k+5$؛ a و b فرديان بما أن d يقسم 8 فإن $d=1$

ـــ إذا كان $n=8k+7$ فإن $a=2(8k+13)$ $b=2(4k+3)$ ؛ $2k+3$ هو فردي , إذا كان $d=8$ أو $d=4$ فإن $2k+3$ يقبل القسمة على الأقل على 2 وهذا تناقض إذن $d=2$.

92 1) n عدد طبيعي ، $\alpha=n^2+n$ و $\beta=n+2$.

أ - نضع $PGCD(\alpha;\beta)=d$ و $PGCD(n;\beta)=d'$

d يقسم α و β إذن يقسم كذلك $n\beta$ ومنه يقسم $n\beta-\beta$ أي يقسم n وبالتالي d يقسم $PGCD(n;\beta)=d'$.

العكس : d' يقسم n و β إذن يقسم $n(n+1)$ أي يقسم α وبالتالي d' يقسم $PGCD(\alpha;\beta)=d$.

d يقسم d' و d' يقسم d معناه $d=d'$ أي

$PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(n;\beta)$.

ب - d يقسم $n+2$ و n إذن يقسم فرقهما 2 وبالتالي $PGCD(\alpha;\beta)=2$ أو $PGCD(\alpha;\beta)=1$.

2) أ - $a=3n^3+5n^2+2n=(3n+2)(n^2+n)$

$b=3n^2+8n+4=(3n+2)(n+2)$

إذن العدد $(3n+2)$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .

ب - لدينا $a=\alpha(3n+2)$ و $b=\beta(3n+2)$.

ـــ إذا كان n فرديا فإن β يكون فرديا وبالتالي $d\neq 2$ إذن $d=PGCD(\alpha;\beta)=1$ ومنه $PGCD(a;b)=(3n+2)$.

ـــ إذا كان n زوجيا فإن α و β زوجيان ومنه $d=2$

إذن يوجد عددان طبيعيان α' و β' أوليان فيما بينهما حيث $\alpha=2\alpha'$ و $\beta=2\beta'$ أي $a=2(3n+2)\alpha'$ و $b=2(3n+2)\beta'$ ومنه $PGCD(a;b)=2(3n+2)$

جـ - $PGCD(a;b)=41$ هو عدد فردي إذن لا يمكن أن يكون $PGCD(a;b)=2(3n+2)=41$ ونأخذ الحالة المتبقية أي $PGCD(a;b)=(3n+2)=41$ معناه $n=13$ وبالتالي $\alpha=182$ و $\beta=15$.

93 n عدد طبيعي ؛ نضع: $a=9n+1$ و $b=9n-1$

1) $a-b=2$ ؛ $PGCD(a;b)$ يقسم الفرق $a-b$ أي $PGCD(a;b)$ يقسم 2 هو إما 1 وإما 2.

ـــ إذا كان n زوجيا فإن a و b يكونا فرديان وبالتالي $PGCD(a;b)=1$.

ـــ إذا كان n فرديا فإن a و b يكونا زوجيان ومنه يقبلان القسمة على 2 وبالتالي $PGCD(a;b)=2$.

3) $ab=(9n+1)(9n-1)=81n^2-1$ وفي حالة n عدد فردي ، $PGCD(a;b)=2$ معناه $a=2k$، $b=2k'$ و $pgcd(k;k')=1$ إذن $ab=4kk'$ وبالتالي $81n^2-1=4k''$ معناه $81n^2=4k''+1$

إذن باقي قسمة العدد $81n^2$ على 4 هو 1 .

المسائل

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع: $s_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$.

في هذا التمرين يمكن استعمال النتيجة التالية :

$PGCD(a;b) = 1$ يكافئ $PGCD(a^2;b^2) = 1$.

1) $s_n = 1^3 = 1$ و $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$ إذن $s_1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$ ومنه الخاصية البدائية صحيحة .

نفرض $s_k = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ من أجل $k \in \mathbb{N}^*$ ولنبرهن صحة الخاصية $s_{k+1} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.

أي $s_{k+1} = s_k + (k+1) = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$

$s_{k+1} = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$ $= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = s_{k+1}$.

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $s_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2) k و $k+1$ عددان متواليان إذن هما أوليان فيما بينهما وبالتالي $PGCD(k;k+1) = 1$.

ـــ ليكن k عدد طبيعي غير معدوم , $s_{2k} = \left(\frac{2k(2k+1)}{2}\right)^2$

أي $s_{2k} = k^2(2k+1)^2$ ؛ $s_{2k+1} = \left(\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}\right)^2$

معناه $s_{2k+1} = (2k+1)^2(k+1)^2$. بما أن $PGCD(k;k+1) = 1$ فإن $PGCD(k^2;(k+1)^2) = 1$

وبالتالي : $PGCD(s_{2k};s_{2k+1}) = (2k+1)^2$

3) $PGCD(2k+1;2k+3)$ يقسم الفرق الذي هو 2 إذن $PGCD(2k+1;2k+3) = 1$

أو $PGCD(2k+1;2k+3) = 1$.

97 a عدد طبيعي غير معدوم .

1) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية: $9 + a^2 = 2^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 4 .

أ - نفترض أن المعادلة تقبل حلا a زوجيا ومنه 2 يقسم a^2 إذن يقسم الفرق $2^n - a^2$ وبالتالي 2 يقسم 9 وهذا تناقض إذن لا يمكن أن يكون a زوجيا إذن يكون فرديا .

ب - نفترض أن المعادلة تقبل حلا a إذن هو فردي ومنه باقي قسمة a^2 على 4 هو 1 أي $a^2 = 4k + 1$ مع $k \in \mathbb{N}$ ومنه $9 + 4k + 1 = 2^n$ أي $10 = 2^n - 4k$. بما أن 4 يقسم 2^n وهذا من أجل $n \geq 4$ فإن 4 يقسم $2^n - 4k$ أي 4 يقسم 10 وهذا تناقض . إذن المعادلة لا تقبل حلول.

2) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية: $9 + a^2 = 3^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 3 .

أ - $3^2 - 1 = 8$ و 8 يقبل القسمة 4 إذن الخاصية البدائية صحيحة . نفرض أنه من أجل $k \in \mathbb{N}^*$ العدد $3^{2k} - 1$ يقبل القسمة على 4 أي $3^{2k} - 1 = 4P$ مع $p \in \mathbb{N}^*$.

$3^{2(k+1)}-1=3^{2k+2}-1=9\times3^{2k}-1=9(4p+1)-1$

$3^{2(k+1)}-1=36p+8=4(9p+2)$ إذن $3^{2(k+1)}-1$ يقبل القسمة على 4 , وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من اجل كل $n\in\mathbb{N}^*$, $3^{2n}-1$ يقبل القسمة على 4 .

ب - لدينا $3^{2n}=4k+1$ حيث k عدد طبيعي و $3\times3^{2n}=4(3k)+3$ أي $3^{2n+1}=4k'+3$ حيث k' عدد طبيعي .

إذن الباقيان للقسمة الأقليدية لكل من العددين 3^{2n} و 3^{2n+1} على 4 هما 1 و 3 على الترتيب .

جـ - حسب السؤال السابق من أجل كل عدد طبيعي زوجي n ، باقي قسمة 3^n على 4 هو 1 ومن أجل كل عدد طبيعي فردي n ، باقي قسمة 3^n على 4 هو 3 إذن الباقي يختلف عن 2.

نفترض أن المعادلة $9+a^2=3^n$ تقبل حلا a فرديا إذن $a^2=4k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$ ؛ ولدينا إذا كان n فرديا فإن $3^n=4k'+1$ ومنه $9=4(k'-k)$ وهذا غير ممكن ؛ وإذا كان n زوجيا فإن $3^n=4k'+3$ ومنه $7=4(k'-k)$ وهذا كذلك غير ممكن , ومنه إذا كان a حلا للمعادلة فلا يمكنه أن يكون فرديا وبالتالي يكون a زوجيا ، ومنه $a=2m$ وبالتالي $3^n=9+a^2=4(m+2)+1$ إذن باقي قسمة 3^n على 4 هو 1 وهذا في الحالة n زوجي

د - $3^{2p}-a^2=(3^p-a)(3^p+a)$.

نفترض أن المعادلة $9+a^2=3^n$ تقبل حلا a فإن n زوجي أي $n=2p$ و a زوجي

ومنه $9=(3^p-a)(3^p+a)$ و a زوجي.

قواسم العدد 9 هي 1 ، 3 و 9 إذن :

(3^p-a)	1	3	9
(3^p+a)	9	3	1
$2a$	8	0	-8
a	4	0	-4

إذا كان $a=0$ فإن $3^n=9$ أي $n=2$ ولكن $n\geq3$

وإذا كان $a=-4$ أو $a=4$ فإن $3^n=25$ وهذا غير ممكن.

3) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية : $9+a^2=5^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

أ - نضع $n=2p+1$ ومنه $5^n=5\times5^{2p}$ ، الباقيان الممكنان لقسمة 5^p على 3 هما 1 أو 2 ومنه باقي قسمة 5^{2p} على 3 هو 1 وبالتالي باقي قسمة 5^n على 3 هو 2.

إذا كان $a=3k$ فإن باقي قسمة $9+a^2$ على 3 هو 0.

إذا كان $a=3k+1$ أو $a=3k+2$ فنجد باقي قسمة $9+a^2$ على 3 هو 1 إذن من أجل كل عدد طبيعي a يكون باقي قسمة $9+a^2$ على 3 هو 0 أو 1 وبالتالي لا يوجد عدد طبيعي a يحقق $9+a^2=5^n$.

ب - في حالة n زوجي ، يكتب على الشكل $n=2p$ ويكون لدينا $9=5^{2p}-a^2=(5^p-a)(5^p+a)$

والحالة الوحيدة هي $5^p+a=9$ و $5^p-a=1$ وهذا يعني $2\times5^p=10$ و $a=9-5^p$ أي $p=1$ و $a=4$

98 1) أ - إذا كان d قاسم للعددين a^p-1 و $a^{p+1}-1$ فإنه يقسم فرقهما $a^{p+1}-a^p$ أي d يقسم العدد $a^p(a-1)$.

ب - نفرض $PGCD(4^{p+1}-1,4^p-1)=D$ ومنه $D=4^i$ أو $D=3$ أو $D=3\times4^i$ مع $i\in\{0,1,...,p\}$

ولدينا D لا يمكن أن يكون زوجيا وبالتالي $D=1$ أو $D=3$.

2) أ - $u_2=5$ ، $u_3=21$ و $p\gcd(5;21)=1$.

ب - استعمال التراجع للبرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

جـ - البرهان بالتراجع نجد ، من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n هو عدد طبيعي .

د - $PGCD\left(u_{n+1}, u_n\right) = 1$.

3) **أ -** ليكن n عددا طبيعيا، $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3} = 4u_n + \frac{4}{3}$

$v_{n+1} = 4\left(v_n - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3} = 4v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول $v_0 = u_0 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

ب - $v_n = \frac{4}{3} \times 4^n$ ومنه $u_n = \frac{4}{3} \times 4^n - \frac{1}{3} = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$

جـ - لدينا $4^{n+1} - 1 = 3u_n$ و $4^{n+2} - 1 = 3u_{n+1}$ وحسب السؤال 2) لدينا $PGCD\left(u_{n+1}, u_n\right) = 1$ وهذا معناه $PGCD\left(4^{n+2} - 1, 4^{n+1} - 1\right) = 3$.

99 1) $x^2 + y^2 = 4$ ... E معناه $(2 - x)(2 + x) = y^2$

إذن يجب أن يكون $2 - x > 0$ أي $x = 1$ ونجد $y^2 = 3$

إذن لا يوجد عدد طبيعي y يحقق المعادلة E.

2) أ - نفترض أن العددين x و y زوجيان أي $x = 2n$ و $y = 2m$ إذن $p^2 = 2\left(n^2 + m^2\right)$ وبالتالي 2 يقسم p^2 ومنه يقسم p وهذا تناقض لأن p أولي $p \neq 2$ أي p عدد فردي .

نفترض أن العددين x و y فرديان أي $x = 2n + 1$ و $y = 2m + 1$ إذن $p^2 = 2\left(2n^2 + 2n + 2m^2 + 2m + 1\right)$ وهذا كذلك تناقض إذن x و y أحدهما زوجي والآخر فردي .

ب - نفترض أن p يقسم x أي $x = kp$ إذن $y^2 = p^2\left(1 - k^2\right)$ حالتين ممكنتين $k = 1$ أو $k = 0$ أي $x = 0$ أو $y = 0$ ولكن x و y غير معدومين

وبنفس الطريقة إذا افترضنا p يقسم y ؛

إذن p لا يقسم x ولا y.

جـ - نضع $PGCD\left(x^2, y^2\right) = d$ ؛ d يقسم المجموع $x^2 + y^2$ أي d يقسم p^2 .

د - $d = 1$ أو $d = p$ ، أو $d = p^2$ بما أن p لا يقسم x ولا y فإن $d \neq p$ ، أو $d \neq p^2$ وبالتالي $d = 1$.

3)أ - $\left(u^2 - v^2\right)^2 + (2uv)^2 = u^4 + v^4 - 2u^2v^2 + 4u^2v^2$

$\left(u^2 - v^2\right)^2 + (2uv)^2 = u^4 + v^4 + 2u^2v^2 = \left(u^2 + v^2\right)^2$ و $\left(u^2 - v^2\right)^2 + (2uv)^2 = p^2$ وهذا هو المطلوب .

ب - $p = 5$ معناه $p = 1^2 + 2^2$ إذن $(3,4)$ هي حل لـ E

$p = 13$ معناه $p = 3^2 + 2^2$ إذن $(5,12)$ هي حل لـ E.

4) **أ -** $p = 3$ ؛ إذا افترضنا أن $u^2 + v^2 = 3$ فإن $u^2 = 3 - v^2$ ويجب أن يكون $v^2 < 3$ وبالتالي $v = 1$ ثم نجد $u^2 = 2$ و 2 ليس مربعا تاما إذن 3 ليس مجموع مربعين .

$x^2 + y^2 = 9$ معناه $y^2 = 9 - x^2$ ومنه يجب أن يكون $x^2 = 1$ أو $x^2 = 4$ وعليه $y^2 = 8$ أو $y^2 = 5$ و 8 و 5 ليسا مربعين إذن المعادلة لا تقبل حلا .

ب - $p=7$ ؛ إذا افترضنا أن $u^2+v^2=7$ فإن $u^2=7-v^2$ ويجب أن يكون $v^2<7$ وبالتالي $v=1$ أو $v=2$ ثم نجد $u^2=6$ أو $u^2=3$ و 6 و 3 ليسا مربعين تامين إذن 7 ليس مجموع مربعين .

$x^2+y^2=49$ معناه $y^2=49-x^2$ ومنه يجب أن يكون $x^2=1$ أو $x^2=4$ أو $x^2=9$ أو $x^2=16$ أو $x^2=25$ أو $x^2=36$ وعليه $y^2=48$ أو $y^2=45$ أو $y^2=40$ أو $y^2=33$ أو $y^2=24$ أو $y^2=13$ وفي كل حالة y ليسا عددا طبيعيا إذن المعادلة لا تقبل حلا .

100 1) $M_0(x_0;y_0)$ ؛ ولدينا $M_0(1;8)$ و $5(1)-8+3=0$ ومنه المعادلة محققة إذن $M_0\in(\Delta)$.

نفرض أن $M_k\in(\Delta)$ أي $5x_k-y_k+3=0$.

لنبرهن $M_{k+1}\in(\Delta)$.

لدينا $\begin{cases} 5x_{k+1}=\dfrac{35}{3}x_k+\dfrac{5}{3}y_k+5 \\ -y_{k+1}=-\dfrac{20}{3}x_k-\dfrac{8}{3}y_k-5 \end{cases}$ ومنه $5x_{k+1}-y_{k+1}=5x_k-y_k$ أي $5x_{k+1}-y_{k+1}+3=5x_k-y_k+3$

معناه $5x_{k+1}-y_{k+1}+3=0$ إذن $M_{k+1}\in(\Delta)$

وبالتالي حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $M_n\in(\Delta)$.

ـــ ليكن n عدد طبيعي ، $M_n\in(\Delta)$ معناه $5x_n-y_n+3=0$ أي $5x_n+3=y_n$ بالتعويض في المعادلة الأولى للجملة نجد $x_{n+1}=\dfrac{7}{3}x_n+\dfrac{1}{3}(5x_n+3)+1$ ومعناه $x_{n+1}=4x_n+2$.

2) $x_0=1$ ومنه $x_0\in\mathbb{N}$ ؛ نفرض $x_k\in\mathbb{N}$ ومنه $4x_k\in\mathbb{N}$ إذن $(4x_k+2)\in\mathbb{N}$ والتالي $x_{k+1}\in\mathbb{N}$.

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $x_n\in\mathbb{N}$.

ـــ لدينا $5x_n+3=y_n$ بما أن $x_n\in\mathbb{N}$ فإن $(5x_n+3)\in\mathbb{N}$ وبالتالي $y_n\in\mathbb{N}$.

3) $PGCD(x_n;y_n)=d$ إذن يوجد عددان طبيعيان غير معدومين وأوليين فيما بينهما x و y حيث $x_n=dx$ و $y_n=dy$. لدينا الثنائية $(x_n;y_n)$ تحقق معادلة (Δ) إذن $5x_n-y_n+3=0$ ومنه $d(5x-y)+3=0$ أي $3=d(y-5x)$ إذن d قاسم للعدد 3 أي $d\in\{1;3\}$.

4) $x_0=\dfrac{5}{3}\times4^0-\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}=1$ وهذا صحيح .

نفرض أن $x_k=\dfrac{5}{3}\times4^k-\dfrac{2}{3}$ ولنبرهن $x_{k+1}=\dfrac{5}{3}\times4^{k+1}-\dfrac{2}{3}$.

لدينا $x_{k+1}=4x_k+2=4\left(\dfrac{5}{3}\times4^k-\dfrac{2}{3}\right)+2$ $x_{k+1}=\dfrac{5}{3}\times4^{k+1}-\dfrac{8}{3}+2=\dfrac{5}{3}\times4^{k+1}-\dfrac{2}{3}$.

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n, $x_n=\dfrac{5}{3}\times4^n-\dfrac{2}{3}$.

ـــ مما سبق ينتج $3x_n=5\times4^n-2$ إذن 3 قاسم للعدد $5\times4^n-2$. لدينا 2 يقسم 4^n ومنه 2 يقسم 5×4^n وبالتالي 2 يقسم $5\times4^n-2$ إذن 2 و 3 موجودان في تحليل العدد $5\times4^n-2$ إذن 6 قاسم للعدد $5\times4^n-2$.

اختبر معلوماتك

اختيار من متعدد

101 1) ب - $r=5$
2) جـ - $46=13\times 3+7$.
3) ب - $70=11\times 6+4$.

102 1) ب - $PGCD\left(a;12\right)$ هو 1 أو 3؛
لأن $a-12b=15$ تعني أن $a-12\left(b+1\right)=3$
ومنه $PGCD\left(a;12\right)$ هو قاسم للعدد 3.
2) جـ - العدد a هو جداء عددين أوليين في ما بينهما ،
لأن $a=2835=3^4\times 5\times 7=81\times 45$؛ 81 و 45 أوّليان فيما بينهما.
3) ب - يوجد كسر مساويا لـ F مقامه من قوى العدد 15 لأن $F=\dfrac{4487}{14175}=\dfrac{7\times 641}{3^4\times 5^2\times 7}=\dfrac{5^2\times 641}{\left(3\times 5\right)^4}$

103 جـ - $PGCD\left(n;n+1\right)=1$.

أصحيح أم خطأ ؟

104 1) خاطئة. 2) صحيحة. 3) صحيحة.
4) خاطئة. 5) خاطئة. 6) خاطئة.

105 1) خاطئ. 2) صحيح. 3) صحيح. 4) صحيح. 5) خاطئ. 6) خاطئ.

106 1) صحيحة. 2) خاطئة. 3) صحيحة.
4) خاطئة. 5) صحيحة. 6) خاطئة.

الموافقات في مجموعة الأعداد الصحيحة

التمارين

التمارين التطبيقية

1 - الموافقة في $\mathbb{Z}$

1 أ - $45-3=42=7\times6$ إذن $45\equiv3[7]$.

ب - $152-2=150=3\times50$ إذن $152\equiv2[3]$.

جـ - $29-(-1)=30=6\times5$ إذن $29\equiv-1[6]$.

د - $137-(-3)=140=5\times28$ ومنه $137\equiv-3[5]$.

و - $-13-2=-15=5(-3)$ ومنه $-13\equiv2[5]$.

هـ - $-17-(-7)=-10=10(-1)$ ومنه $-17\equiv-7[10]$

2 $37\equiv x\,[4]$ معناه $37-x=4k$ مع $k\in\mathbb{Z}$ أي

$x=37-4k$ وبالتالي يمكن أخذ $x=37$ ، $x=37-4=33$ ، $x=37-4\times2=29$ ،

$x=37-4(-1)=42$ ، $x=37-4(-2)=45$

من أجل $k=9$ يكون $x=1$ وهو العدد الطبيعي الوحيد الأصغر تماما من 4.

3 $n\equiv4[7]$ معناه $n=7k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

$0\le n\le30$ معناه $0\le7k+4\le30$ أي $-\frac{4}{7}\le k\le\frac{26}{7}$

$k\in\mathbb{Z}$ إذن $k\in\{0,1,2,3\}$ ومنه $n\in\{4,11,18,25\}$.

4 $n\equiv140[12]$ و $140\equiv8[12]$ إذن $n\equiv8[12]$

بما أن $0\le8<12$ فإن 8 هو باقي قسمة n على 12.

5 $x\equiv2[7]$ إذن:

$x+5\equiv7[7]$ ومنه $x+5\equiv0[7]$

$x-5\equiv-3[7]$ ومنه $x-5\equiv4[7]$

$9x\equiv18[7]$ ومنه $9x\equiv4[7]$

$-15x\equiv-30[7]$ ومنه $-15x\equiv5[7]$

$x\equiv2[7]$ ومنه $x^3\equiv8[7]$ أي $x^3\equiv1[7]$.

6 أ - $46\equiv0[n]$ معناه $46=kn$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ إذن n يقسم 46 و $n\ge2$ أي $n\in\{2,23,46\}$.

ب - $10\equiv1[n]$ معناه $9=kn$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ إذن n يقسم 9 و $n\ge2$ أي $n\in\{3,9\}$.

جـ - $27\equiv5[n]$ معناه $22=kn$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ إذن n يقسم 22 و $n\ge2$ أي $n\in\{2,11,22\}$.

7 $a\equiv b\,[n]$ معناه $a-b=kn$ مع $k\in\mathbb{N}$ ويكافئ $am-bm=knm$ ومعناه $am\equiv bm\,[nm]$.

8 لدينا $A-a\equiv0[n]$ ، $B-b\equiv0[n]$ و $C-c\equiv0[n]$ وهذا معناه $A\equiv a[n]$ ، $B\equiv b[n]$ و $C\equiv c[n]$

إذن $ABC\equiv abc\,[n]$ أي $ABC-abc\equiv0[n]$.

9 $n \equiv 0[m]$ معناه $n = km$ مع $k \in \mathbb{N}^*$.

$a \equiv b[n]$ معناه $a - b = k'n$ مع $k' \in \mathbb{N}$.

ومنه $a - b = k'km$ إذن $a \equiv b[m]$.

10 1) $30757 \equiv 7[10]$ ومنه $a \equiv 7[10]$. $15163 \equiv 3[10]$ ومنه $b \equiv 3[10]$. $12924 \equiv 4[10]$ ومنه $c \equiv 4[10]$.

2) أ - $a+b+c \equiv 7+3+4[10]$ ومنه $a+b+c \equiv 4[10]$.

ب - $a-b+c \equiv 7-3+4[10]$ ومنه $a-b+c \equiv 8[10]$.

جـ - $a+b-c \equiv 7+3-4[10]$ ومنه $a+b-c \equiv 6[10]$.

د - $abc \equiv 7\times3\times4[10]$ ومنه $abc \equiv 4[10]$.

هـ - $ab+ac+bc \equiv 7\times3+7\times4+4\times3[10]$

$ab+ac+bc \equiv 1[10]$.

و - $a^2+b^2+c^2 \equiv 49+9+16[10]$ ومنه $a^2+b^2+c^2 \equiv 4[10]$.

11 الساعة المطلوبة هي n حيث $0 \le n < 24$

أ ـــ $n \equiv 3+112[24]$ ومنه $n \equiv 115[24]$ أي $n \equiv 19[24]$ إذن الساعة كانت تشير إلى 19 أي السابعة مساء .

ب ـــ $n \equiv 3-163[24]$ ومنه $n \equiv -160[24]$ أي $n \equiv 8[24]$ إذن الساعة كانت تشير إلى الثامنة صباحا .

12 أ ـــ $15123 \equiv 3[5]$ ومنه النقطة M تصل إلى النقطة D .

ب ـــ $-15132 \equiv 3[5]$ ومنه النقطة M تصل كذلك إلى النقطة D .

13 $12 \equiv 2[5]$ ومنه $12^4 \equiv 2^4[5]$ أي $12^4 \equiv 16[5]$

$16 \equiv 1[5]$ ومنه $12^4 \equiv 1[5]$. $1527 = 4\times381+3$

لدينا $12^{1527} = 12^{4\times381+3} = \left(12^4\right)^{381} \times 12^3$ ومنه $12^{1527} \equiv 1^{381}\times2^3[5]$ أي $12^{1527} \equiv 3[5]$.

14 $371 \equiv 1[5]$ ومنه $371^{238} \equiv 1[5]$.

$579 \equiv -1[5]$ ومنه $579^{2008} \equiv 1[5]$.

$1429 \equiv -1[5]$ ومنه $1429^{2009} \equiv -1[5]$ بما أن $-1 \equiv 4[5]$ فإن $1429^{2009} \equiv 4[5]$.

$1954 \equiv -1[5]$ ومنه $1954^{1962} \equiv 1[5]$.

15 # $1754 \equiv -1[9]$ ومنه $1754^{12} \equiv 1[9]$.

$34572 \equiv 3[9]$ ومنه $34572^{457} \equiv 3^{457}[9]$ ولدينا

$3^{457} = 3\times3^{456} = 3\times9^{228}$ إذن $3^{457} \equiv 0[9]$ وبالتالي $34572^{457} \equiv 0[9]$.

$375 \equiv -3[9]$ ومنه $375^{2009} \equiv (-3)^{2009}[9]$ ولدينا $(-3)^{2009} = -3\times(-3)^{2\times1004} = -3\times9^{1004}$ ومنه

$(-3)^{2009} \equiv 0[9]$ إذن $375^{2009} \equiv 0[9]$.

16 أ - $4 \equiv -1[5]$ ومنه $4^{2003} \equiv -1^{2003}[5]$ إذن $4^{2003}+1^{2003} \equiv 0[5]$.

$3 \equiv -2[5]$ ومنه $3^{2003} \equiv -2^{2003}[5]$

إذن $3^{2003}+2^{2003} \equiv 0[5]$.

وبالتالي $1^{2003}+2^{2003}+3^{2003}+4^{2003}\equiv 0[5]$

ب - $6\equiv -1[7]$ ومنه $6^{2007}\equiv -1^{2007}[7]$ إذن $6^{2007}+1^{2007}\equiv 0[7]$.

$5\equiv -2[7]$ ومنه $5^{2007}\equiv -2^{2007}[7]$ إذن $5^{2007}+2^{2007}\equiv 0[7]$ ؛ $4\equiv -3[7]$ ومنه $4^{2007}\equiv -3^{2007}[7]$ إذن

$4^{2007}+3^{2007}\equiv 0[7]$ ؛ وبالتالي $1^{2007}+2^{2007}+3^{2007}+4^{2007}+5^{2007}+6^{2007}\equiv 0[7]$.

جـ - لدينا $1\equiv -8[9]$ ؛ $7\equiv -2[9]$ ؛ $3\equiv -6[9]$ ؛ $5\equiv -4[9]$.

ومنه $1^{2008}\equiv 8^{2008}[9]$ ؛ $7^{2008}\equiv 2^{2008}[9]$ ؛ $3^{2008}\equiv 6^{2008}[9]$ ؛ $5^{2008}\equiv 4^{2008}[9]$.

إذن $1^{2008}-8^{2008}\equiv[9]$ ؛ $7^{2008}-2^{2008}\equiv[9]$ ؛ $3^{2008}-6^{2008}\equiv[9]$ ؛ $5^{2008}-4^{2008}\equiv[9]$.

وبالتالي : $1^{2008}-2^{2008}+3^{2008}-4^{2008}$

$+5^{2008}-6^{2008}+7^{2008}-8^{2008}\equiv 0[9]$

17 من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^{2n+1}\equiv 0[4]$ ؛ $2^{2n+1}=2\times 4^n$ ومنه $2^{2n+1}\equiv 0[4]$ ؛ $3\equiv -1[4]$ ومنه

$3^{2n+1}\equiv -1^{2n+1}[4]$ أي $1^{2n+1}+3^{2n+1}\equiv 0[4]$ ؛

وبالتالي $1^{2n+1}+2^{2n+1}+3^{2n+1}+4^{2n+1}\equiv 0[4]$.

18 مجموع أرقام العدد 7254 هو 18 وهو مضاعف لِـ 9 إذن $7254\equiv 0[9]$ ومنه $7254^n\equiv 0[9]$.

العدد 3532 زوجي إذن $3532\equiv 0[2]$ ومنه $3532^n\equiv 0[2]$.

$1785\equiv 0[5]$ ومنه $1785^n\equiv 0[5]$.

$51502\equiv 0[11]$ ومنه $51502^n\equiv 0[11]$.

19 1) $3286\equiv 6[10]$ ومنه $3286^{374}\equiv 6^{374}[10]$ ولدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ $6^n\equiv 6[10]$

إذن $6^{374}\equiv 6[10]$ وبالتالي $3286^{374}\equiv 6[10]$.

2) $76\equiv 4[12]$ ولدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $4^n\equiv 4[12]$

إذن $4^{784}\equiv 4[12]$ وبالتالي $76^{784}\equiv 4[12]$.

20 1) ليكن n عددا طبيعيا , $3^{2n}=9^n$ و $9\equiv 2[7]$ إذن $9^n\equiv 2^n[7]$ ومنه $3^{2n}\equiv 2^n[7]$.

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي , $3^{2n}-2^n\equiv 0[7]$.

2) بواقي قسمة العدد n على 3 هي 0 , 1 و 2 وبفرض n ليس مضاعفا لِــ 3 فيكون $n=3p+1$ أو $n=3p+2$ مع $p\in\mathbb{N}$.

إذا كان $n=3p+1$, $2^{2n}+2^n+1=2^{6p+2}+2^{3p+1}+1$

$2^{2n}+2^n+1=4\times 8^{2p}+2\times 8^p+1$. لدينا $8\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $p\in\mathbb{N}$, $8^p\equiv 1[7]$ و $8^{2p}\equiv 1[7]$.

وبالتالي $2^{2n}+2^n+1\equiv 7[7]$ أي $2^{2n}+2^n+1\equiv 0[7]$

إذا كان $n=3p+2$, $2^{2n}+2^n+1=2^{6p+4}+2^{3p+2}+1$

$2^{2n}+2^n+1=2\times 8^{2p+1}+4\times 8^p+1$. لدينا من أجل كل $p\in\mathbb{N}$, $8^p\equiv 1[7]$ و $8^{2p+1}\equiv 1[7]$.

وبالتالي $2^{2n}+2^n+1\equiv 7[7]$ أي $2^{2n}+2^n+1\equiv 0[7]$

21 ليكن n عددا طبيعيا .

1) $3^3=27$ ومنه $3^3\equiv 2[5]$ إذن $3^{3n}\equiv 2^n[5]$ ومنه $3^{3n+2}\equiv 9\times 2^n[5]$ إذن $3^{3n+2}\equiv 4\times 2^n[5]$

$2^{n+4}=16\times 2^n$ ؛ $16\equiv 1[5]$ إذن $2^{n+4}\equiv 2^n[5]$.

$3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 4\times 2^n+2^n[5]$ أي $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 5\times 2^n[5]$ ومنه $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0[5]$.

2) $3^{3n}\equiv 2^n[5]$ ومنه $3\times 3^{3n}\equiv 3\times 2^n[5]$

$2^{n+1}=2\times 2^n$ إذن $3^{3n+1}+2^{n+1}\equiv 3\times 2^n+2\times 2^n[5]$

أي $3^{3n+1}+2^{n+1}\equiv 5\times 2^n[5]$ ومنه $3^{3n+1}+2^{n+1}\equiv 0[5]$

22 $10\equiv 1[9]$ و $9\equiv 0[9]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $10^n\equiv 1[9]$ و $9n\equiv 0[9]$

إذن $(9n-1)10^n+1\equiv -1\times 1+1[9]$ أي $\alpha\equiv 0[9]$.

23 ليكن n عددا طبيعيا .

1) $2^6=64$ و $64\equiv 13[17]$ إذن $2^6\equiv 13[17]$ ومنه $2^{6n}\equiv 13^n[17]$ وبالتالي $2^{6n+3}\equiv 8\times 13^n[17]$

$3^4=81$ و $81\equiv 13[17]$ إذن $3^4\equiv 13[17]$ ومنه $3^{4n}\equiv 13^n[17]$ وبالتالي $3^{4n+2}\equiv 9\times 13^n[17]$.

$2^{6n+3}+3^{4n+2}\equiv 8\times 13^n+9\times 13^n[17]$ ومنه $2^{6n+3}+3^{4n+2}\equiv 17\times 13^n[17]$ إذن $2^{6n+3}+3^{4n+2}\equiv 0[17]$.

2) $2^{5n}=\left(2^5\right)^n=32^n$ و $32\equiv 3[29]$ إذن $2^{5n}\equiv 3^n[29]$ ومنه $2^{5n+1}\equiv 2\times 3^n[29]$.

$3^{n+3}=27\times 3^n$ إذن $2^{5n+1}+3^{n+3}\equiv 2\times 3^n+27\times 3^n[29]$ ومنه $2^{5n+1}+3^{n+3}\equiv 29\times 3^n[29]$ إذن

$2^{5n+1}+3^{n+3}\equiv 0[29]$.

25 1) إذا كان n فرديا فإن البواقي الممكنة لقسمته على 16 هي الأعداد الطبيعية الفردية الأصغر تماما من 16 .

إذا كان $n\equiv 1[16]$ فإن $n^4\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 3[16]$ فإن $n^4\equiv 3^4[16]$ ومنه $n^4\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 5[16]$ فإن $n^2\equiv (-9)^2[16]$ ومنه $n^2\equiv 1[16]$ وبالتالي $n^4\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 7[16]$ فإن $n^2\equiv 7^2[16]$ أي $n^2\equiv 1[16]$ وبالتالي $n^4\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 9[16]$ فإن $n^2\equiv 1[16]$ ومنه $n^4\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 11[16]$ فإن $n^2\equiv (-5)^2[16]$ ومنه $n^2\equiv 9[16]$ وبالتالي $n^4\equiv 9^2[16]$ إذن $n^2\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 13[16]$ فإن $n\equiv -3[16]$ ومنه $n^4\equiv (-3)^4[16]$ ومنه $n^4\equiv 1[16]$

إذا كان $n\equiv 15[16]$ فإن $n\equiv -1[16]$ ومنه $n^4\equiv 1[16]$

2) بواقي قسمة n على 5 هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 و 4

ليكن r ينتمي إلى $\{1,2,3,4\}$ بوضع $n\equiv r[5]$ معناه أن n ليس مضاعفا للعدد 5 وبالتالي يكون $n^4\equiv r^4[5]$

ولدينا $1^4\equiv 1[5]$ ، $2^4\equiv 1[5]$ ، $3^4\equiv 1[5]$ ، $4^4\equiv 1[5]$

إذن من أجل كل $r\in\{1,2,3,4\}$ $r^4\equiv 1[5]$ وبالتالي $n^4\equiv 1[5]$.

26 أ

$x\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$2x\equiv$	0	2	4	1	3	[5]

ب - $2x\equiv 3[5]$ معناه $x\equiv 4[5]$.

27

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^3\equiv$	0	1	1	6	1	6	6	[7]
$n^3+n-2\equiv$	5	5	1	0	3	2	5	

$n^3+n-2\equiv 0[7]$ معناه $n\equiv 3[7]$.

28 (1

n	0	1	2	3	4	5	6
r_n	1	2	4	8	7	5	1

2) لدينا $2^6\equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $2^{6p}\equiv 1[9]$.

ومنه $2^{6p+k}\equiv r_k\,[9]$ مع $k\in\{1,2,3,4,5\}$

ومنه إذا كان $n=6p$ فإن $r_n=r_0=1$.

إذا كان $n=6p+1$ فإن $r_n=r_1=2$.

إذا كان $n=6p+2$ فإن $r_n=r_2=4$.

إذا كان $n=6p+3$ فإن $r_n=r_3=8$.

إذا كان $n=6p+4$ فإن $r_n=r_4=7$.

إذا كان $n=6p+5$ فإن $r_n=r_5=5$.

3) $65\equiv 2[9]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n , $65^n\equiv 2^n\,[9]$ ولدينا $2^n\equiv r_n\,[9]$ إذن $65^n\equiv r_n\,[9]$.

$2011=6\times 335+1$ ومنه $r_{2011}=r_1=2$ إذن $65^{2011}\equiv 2[9]$

29 أ - $4^5\equiv 1[11]$.

ب - $37\equiv 4[11]$ ومنه $37^5\equiv 4^5\,[11]$ إذن $37^5\equiv 1[11]$ ومنه من أجل كل عدد $k\in\mathbb{N}$ ، $37^{5k}\equiv 1[11]$ ؛

$37^{5k+1}\equiv 4[11]$ ؛ $37^{5k+2}\equiv 5[11]$ ؛ $37^{5k+3}\equiv 9[11]$ و $37^{5k+4}\equiv 3[11]$.

30 $2x=3y$ ومنه $2x\equiv 0[3]$ أي $4x\equiv 0[3]$ وهذا معناه $x\equiv 0[3]$ أي $x=3k$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

وبالتعويض نجد $2(3k)=3y$ أي $y=2k$ ومنه $(x,y)=(3k,2k)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

31 $2x-5y=1$ معناه $2x=5y+1$ إذن $2x\equiv 1[5]$ وهذا معناه $6x\equiv 3[5]$ أي $x\equiv 3[5]$ إذن $x=5k+3$

مع $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض نجد $10k+6=5y+1$ أي $5y=10k+5$ أي $y=2k+1$

ومنه $(x,y)=(5k+3,2k+1)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

32 أ - $\begin{cases}x\equiv 3[5]\\ x\equiv 1[6]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}x=5\alpha+3\\ x=6\beta+1\end{cases}$ إذن $5\alpha-6\beta=-2$ ومنه $5\alpha=6\beta-2$ ومنه $5\alpha\equiv -2[6]$ وهذا يعني

$-\alpha\equiv -2[6]$ أي $\alpha\equiv 2[6]$ ويعني $\alpha=6k+2$ مع $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض نجد $5(6k+2)=6\beta-2$

أي $6\beta=30k+12$ ومعناه $\beta=5k+2$. إذن $x=5\alpha+3=30k+13$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ب - $\begin{cases}2x\equiv 2[4]\\ 4x\equiv 1[3]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}x\equiv 1[2]\\ x\equiv 1[3]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}3x\equiv 3[6]\\ 2x\equiv 2[6]\end{cases}$ ومنه $x\equiv 1[6]$.

2 - التعداد

33 $a=12734$

$a=10^4+2\times 10^3+7\times 10^2+3\times 10+4$

$b=5723$ ؛ $b=5\times 10^3+7\times 10^2+2\times 10+3$

$c=503019$ ؛ $c=5\times 10^5+3+\times 10^3+10+9$.

34 $a=\overline{234}=2\times6^2+3\times6+4$ ؛ $b=\overline{1523}=6^4+5\times6^3+2\times6+3$ ؛
$c=\overline{503012}=5\times6^5+3\times6^3+6+2$.

35 $a=7^3+2\times7^2+3\times7+5=\overline{1235}$. $b=5\times7^2+2\times7=\overline{520}$ ؛ $c=6\times7^3+2\times7+1=\overline{6021}$.

36 $N_a=4a^5+2a^3+a+3=\overline{40213}$.

37 أ ــ $x\geq 7$ ومنه أصغر قيمة هي $x=7$.

ب ــ $\overline{2306}=2\times7^3+3\times7^2+0\times7+6$ و $\overline{1035}=7^3+0\times7^2+3\times7+5$

38 $2=1\times2+0=\overline{10}$ ، $4=1\times2^2+0\times2+0=\overline{100}$ ، $7=1\times2^2+1\times2+1=\overline{111}$ ،
$33=1\times2^5+1=\overline{10001}$.

39 $n=2^6+2^5+2^3+2^2+1=109$ ؛ $n=2x^2+x+4$.

إذن $2x^2+x+4=109$ معناه $2x^2+x-105=0$ ومعناه $x=7$ ، $x=-\frac{15}{2}$. إذن الأساس 7 .

40 $\overline{2003}=\overline{21}\times\overline{43}$ معناه $x\geq5$ و $2x^3+3=(2x+1)(4x+3)$ أي $x\geq5$ و $2x^3-8x^2-10x=0$
ومعناه $2x^2-8x-10=0$ أي $x=10$.

41 أ - $\overline{411}=\overline{15}\times\overline{23}$ معناه $4x^2+x+1=(x+5)(2x+3)$

أي $2x^2-12x-14=0$ ومعناه $x^2-6x-7=0$ أي $x=-1$ أو $x=7$ إذن الأساس هو $x=7$.

ب - $\overline{21}\times\overline{14}=\overline{324}$ معناه $(2a+1)(a+4)=3a^2+2a+4$ ومعناه $a^2-7a=0$ إذن $a=7$.

جـ - $2888=\overline{412}\times\overline{31}$ معناه $2888=(4x^2+x+2)(3x+1)$ ومعناه $12x^3+7x^2+7x=2886$

لدينا $x\geq5$ إذا كان $x=5$ فإن $12x^3+7x^2+7x\equiv0[5]$ بينما $2886\equiv1[5]$ إذن $x\neq5$.

ولدينا : $12\times6^3+7\times6^2+7\times6=2886$ إذن الأساس $x=6$.

42 أ - $x^2+6x+2=7x+7+6x+3$ مع $x>7$ معناه $x^2-7x-8=0$ ومعناه $x=8$.

ب - $\overline{77}\times\overline{63}=(7\times8+7)(6\times8+3)=3213$

جـ - $3213=8\times401+5=8(8(8\times6+2)+1)+5$

$3213=6\times8^3+2\times8^2+8+5=\overline{6215}$.

43 أ - $\overline{12}\times\overline{23}=\overline{276}$. $(a+2)(2a+3)=2a^2+7a+6$ وهذا صحيح من أجل كل عدد طبيعي $a>7$.

ب - $\overline{541}=\overline{22}\times\overline{32}$ معناه $5x^2+4x+1=(2x+2)(3x+2)$ ومعناه $x^2+6x+3=0$ أي $x=-3+\sqrt{6}$

أو $x=-3-\sqrt{6}$ إذن لا يوجد أي أساس يكتب فيه $\overline{541}=\overline{22}\times\overline{32}$

44 $10=1\times2^3+0\times2^2+1\times2+0=\overline{1010}$ ؛ $100=64+32+4=2^6+2^5+2^2$ أي $100=\overline{1100101}$

46 $72881=12(12(12\times(12\times3+6)+2)+1)+5$ ومنه $72881=3\times12^4+6\times12^3+2\times12^2+1\times12+5$

إذن $72881=\overline{36215}$ في الأساس 12

$7^5<72881<7^6$ ولدينا $72881=4\times7^5+2\times7^4+2\times7^3+3\times7^2+2\times7+4$ أي $72881=\overline{422324}$

47 $\overline{3752}=3\times8^3+7\times8^2+5\times8+2=2026$.

48 $\overline{6175}=6\times9^3+1\times9^2+7\times9+5$ ، $\overline{6175}=4523$ لدينا : $12^3<4523<12^4$ ومنه

$4523=2\times12^3+7\times12^2+4\times12+11$ إذن $4523=\overline{274\alpha}$ حيث $\alpha=11$.

49 $\overline{234}=2\times5^2+3\times5+4$ أي $\overline{234}=2\times(7-2)^2+3\times(7-2)+4$ ؛ $\overline{234}=2\times7^2+3\times7-50$

$\overline{234}=1\times7^2+2\times7+6=\overline{126}$

$\overline{1040}=5^3+4\times5=(7-2)^3+20$ ؛ $\overline{1040}=7^3-6\times7^2+12\times7+12$ ؛ $\overline{1040}=2\times7^2+6\times7+5=\overline{265}$

50 $a=1\times a+0=\overline{10}$ ، $a^2=1\times a^2+0\times a+0=\overline{100}$ و $a^3=1\times a^3+0\times a^2+0\times a+0=\overline{1000}$.

51 نفرض أن A يكتب في النظام ذي الأساس العشري كما يلي $A=\overline{a_na_{n-1}...a_0}$ حيث $0\le a_i\le 9$.

ومنه $A=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_0$ ولدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $10^n\equiv1[3]$ وبالتالي

$A\equiv a_n+a_{n-1}+...+a_0[3]$ أي $A\equiv S[3]$ إذن $A\equiv0[3]$ معناه $S\equiv0[3]$.

52 نضع $x=\overline{a_na_{n-1}...a_0}$ ؛ $y=\overline{a_0a_1...a_n}$ ؛ $x\equiv a_n+a_{n-1}+...+a_0[9]$ و $y\equiv a_0+a_1+...+a_n[9]$

ومنه $x-y\equiv0[9]$.

53 (1

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

$4=1\times4+0=\overline{10}$ ، $3+3=1\times4+2=\overline{12}$.

(2
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 111} \\ 3223 \\ +\quad 132 \\ \hline =10021 \end{array}$$
إذن $3223+132=10021$.

54 (1

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

$3\times3=2\times4+1=\overline{21}$ ، $3+3=1\times4+2=\overline{12}$.

(2
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 222}\ \\ 3223 \\ \times\quad 123 \\ \hline 23001 \\ 13112. \\ 3223.. \\ \hline 1203021 \end{array}$$
إذن $3223\times123=1203021$

55
$$\begin{array}{r} 3421 \\ +\ \ 230 \\ \hline 4201 \end{array} \quad ، \quad \begin{array}{r} 431 \\ -132 \\ \hline 244 \end{array} \quad ، \quad \begin{array}{r} 213 \\ \times\ \ 14 \\ \hline 1412 \\ 213. \\ \hline 4042 \end{array}$$.

56

$$\begin{array}{r} 39\beta 7 \\ +\ \ 213 \\ \hline 400\alpha \end{array} \quad ، \quad \begin{array}{r} 400\alpha \\ -39\beta 7 \\ \hline 213 \end{array} \quad ، \quad \begin{array}{r} 27 \\ \times\ \ 41 \\ \hline 27 \\ 104. \\ \hline 1067 \end{array} \ .$$

تمارين للتعمق

1 - الموافقات في $\mathbb{Z}$

57 أ - $2^0 \equiv 1[10]$ ، $2 \equiv 2[10]$ ، $2^2 \equiv 4[10]$ ، $2^3 \equiv 8[10]$ ، $2^4 \equiv 6[10]$ ، $2^5 \equiv 2[10]$.

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $6^n \equiv 6[10]$ (بالتراجع)

$2^4 \equiv 6[10]$ إذن من أجل كل $p \in \mathbb{N}$ ، $2^{4p} \equiv 6^p[10]$

إذن $2^{4p+4} \equiv 6^4[10]$ ومنه $2^{4p+4} \equiv 6[10]$ وعليه $2^{4p+1} \equiv 2[10]$ ؛ $2^{4p+2} \equiv 4[10]$ ؛ $2^{4p+3} \equiv 8[10]$

ب - كل عدد طبيعي يوافق رقم آحاده بترديد 10 .

إذا كان $n = 0$ فإن $2^0 = 1$ وهو رقم آحاده

إذا كان $n = 4k$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ فإن رقم آحاد 2^n هو 6 .

إذا كان $n = 4k + 1$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن رقم آحاد 2^n هو 2 .

إذا كان $n = 4k + 2$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن رقم آحاد 2^n هو 4 .

إذا كان $n = 4k + 3$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن رقم آحاد 2^n هو 8 .

جـ - $3548^9 \times 2534^{31} \equiv 8^9 \times 4^{31}[10]$

أي $3548^9 \times 2534^{31} \equiv 2^{27} \times 2^{62}[10]$.

$3548^9 \times 2534^{31} \equiv 2^{89}[10]$ ولدينا $89 = 4 \times 22 + 1$ ؛

إذن $2^{89} \equiv 2[10]$ ومنه $3548^9 \times 2534^{31} \equiv 2[10]$

إذن رقم آحاد $3548^9 \times 2534^{31}$ هو 2 .

58 $51^2 = 2601$ ومنه $51^2 = 1[100]$ إذن $\left(51^2\right)^{1004} = 1[100]$ أي $51^{2008} \equiv 1[100]$

إذن الرقم الأخير هو 1 وما قبله 0 .

59 لكل عدد صحيح a لدينا إما $a \equiv -1[3]$ وإما $a \equiv 0[3]$ وإما $a \equiv 1[3]$.

إذا كان $x \equiv 0[3]$ أو $y \equiv 0[3]$ فإن $xy\left(x^2 - y^2\right) \equiv 0[3]$

إذا كان $\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ y \equiv 1[3] \end{cases}$ أو $\begin{cases} x \equiv -1[3] \\ y \equiv -1[3] \end{cases}$ أو $\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ y \equiv -1[3] \end{cases}$ أو $\begin{cases} x \equiv -1[3] \\ y \equiv 1[3] \end{cases}$ فإن $\begin{cases} x^2 \equiv 1[3] \\ y^2 \equiv 1[3] \end{cases}$ ومنه $x^2 - y^2 \equiv 0[3]$

إذن $xy\left(x^2 - y^2\right) \equiv 0[3]$.

60 $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 8 = (n+1)^3 - 8$

$n^3 + 3n^2 + 3n - 7 \equiv 0[8]$ معناه $(n+1)^3 \equiv 0[8]$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	[8]
$n+1 \equiv$	1	2	3	4	5	6	7	0	[8]
$(n+1)^3 \equiv$	1	0	3	0	5	0	7	0	[8]

إذن $n^3+3n^2+3n-7\equiv 0[8]$ معناه $n\equiv 1[8]$ أو $n\equiv 3[8]$ أو $n\equiv 5[8]$ أو $n\equiv 7[8]$.

61 أ ــ $2^6\equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل $p\in\mathbb{N}$ ، $2^{6p}\equiv 1[9]$ أي $2^{6p}-1\equiv 0[9]$ معناه $n=6p$.

ب ــ إذا كان $n=6p$ فإن $A=2^n-1=\left(2^3\right)^{2p}-1$ أي $A=8^{2p}-1$ ولدينا

65 نضع $N=\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$n^2\equiv$	0	1	4	4	1	[5]
$n^2-1\equiv$	4	0	3	3	0	[5]
$n^2-4\equiv$	1	2	0	0	2	[5]
$N\equiv$	4	0	0	0	0	[5]

ومنه إذا كان $n\not\equiv 0[5]$ فإن $N\equiv 0[5]$

66 $N=n(2n+1)(7n+1)$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$2n+1\equiv$	1	3	5	1	3	5	[6]
$7n+1\equiv$	1	2	3	4	5	0	[6]
$N\equiv$	0	0	0	0	0	0	[6]

67 أ - $A=n^2-n+1$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^2\equiv$	0	1	4	2	2	3	1	[7]
A	1	1	3	0	6	6	3	[7]

ب - $A\equiv 0[7]$ معناه $n\equiv 3[7]$.

جـ - نضع $B=2753^2-2753+1$ ؛ نعتبر $n=2753$ ومنه $n\equiv 2[7]$ إذن $A\equiv 3[7]$ وبالتالي $B\equiv 3[7]$.

68 $A=2n^3-n^2+2$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^2\equiv$	**0**	**1**	**4**	**2**	**2**	**4**	**1**	[7]
$n^3\equiv$	0	1	1	6	1	6	6	[7]
$2n^3\equiv$	**0**	**2**	**2**	**5**	**2**	**5**	**5**	[7]
A	2	3	0	5	2	3	6	[7]

$2n^3-n^2+2\equiv 0[7]$ معناه $n\equiv 2[7]$

69 أ - $4^3\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $4^{3n}\equiv 1[7]$ وعليه $4^{3n+1}\equiv 4[7]$ ؛ $4^{3n+2}\equiv 2[7]$.

ب - نضع $N=851^{3n}+851^{2n}+851^n+2$

$851\equiv 4[7]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $851^{3n}\equiv 4^{3n}[7]$ أي $851^{3n}\equiv 1[7]$ ويصبح لدينا :

$N\equiv 4^{2n}+4^n+3[7]$ أي $N\equiv 4^n\left(4^n+1\right)+3[7]$

$n\equiv$	0	1	2	[3]
$4^n\equiv$	1	4	2	[7]
$4^n+1\equiv$	2	5	3	[7]
$N\equiv$	5	2	1	[7]

70 أ - $7^3\equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل $k\in\mathbb{N}$ ، $7^{3k}\equiv 1[9]$ وعليه $7^{3k+1}\equiv 7[9]$ ؛ $7^{3k+2}\equiv 4[9]$.

ب - نضع $7^n+3n-1=A$

إذا كان $n=3k$ فإن $A=7^{3k}+9k-1$ ومنه $A\equiv 1+0-1[9]$ أي $A\equiv 0[9]$.

إذا كان $n=3k+1$ فإن $A=7^{3k+1}+9k+2$ ومنه $A\equiv 7+0+2[9]$ أي $A\equiv 0[9]$.

إذا كان $n=3k+2$ فإن $A=7^{3k+2}+9k+5$ ومنه $A\equiv 4+0+5[9]$ أي $A\equiv 0[9]$.

71

$x\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	[8]
$3x\equiv$	0	3	6	1	4	7	2	5	[8]

$3x\equiv 7[8]$ معناه $x\equiv 5[8]$.

72 $8x^2\equiv 16[3]$ معناه $2x^2\equiv 1[3]$.

البواقي الممكنة لكل عدد صحيح x على 3 هي 0 ، 1 ، 2 ومنه $x^2\equiv 0[3]$ أو $x^2\equiv 1[3]$ وبالتالي $2x^2\equiv 0[3]$ أو $2x^2\equiv 2[3]$

إذن من أجل كل عدد صحيح x يكون إما $2x^2\equiv 0[3]$ وإما $2x^2\equiv 2[3]$ وبالتالي لا يوجد أي عدد صحيح x يحقق $2x^2\equiv 1[3]$.

73 أ - $2^3\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $k\in\mathbb{N}$ ، $2^{3k}\equiv 1[7]$ وبالتالي $2^{3k+1}\equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2}\equiv 4[7]$

$3^6\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $k\in\mathbb{N}$ ، $3^{6k}\equiv 1[7]$ وبالتالي $3^{6k+1}\equiv 3[7]$ ، $3^{6k+2}\equiv 2[7]$ ، $3^{6k+3}\equiv 6[7]$ ، $3^{6k+4}\equiv 4[7]$ و $3^{6k+5}\equiv 5[7]$.

ب -

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$2^n\equiv$	1	2	4	1	2	4	[7]
$3^n\equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]
$2^n+3^n\equiv$	2	5	6	0	6	2	[7]

$2^x+3^x\equiv 0[7]$ معناه $x\equiv 3[6]$.

74 $3^5\equiv 1[11]$ ، $5^5\equiv 1[11]$.

$5^x-3^x+6\equiv 0[11]$ معناه $5^x-3^x\equiv 5[11]$

$x\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$5^x\equiv$	1	5	3	4	9	[11]
$3^x\equiv$	1	3	9	5	4	[11]
$5^x-3^x\equiv$	0	2	5	10	5	[11]

$5^x-3^x\equiv 5[11]$ معناه $x\equiv 2[5]$ أو $x\equiv 4[5]$.

75 أ -

$x\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$x^2\equiv$	0	1	4	4	1	[5]

ب - $x^2-5y^2=3$ معناه $x^2=5y^2+3$ إذن لكي تكون الثنائية (x,y) حلا للمعادلة $x^2=5y^2+3$ يجب أن يكون $x^2\equiv 3[5]$ وهذا غير ممكن .

76 أ -

$y\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$y^3\equiv$	0	1	1	6	1	1	6	[7]
$2y^3\equiv$	0	2	2	5	2	2	5	[7]

ب - $7x^2+2y^3=3$ معناه $2y^3=-7x^2+3$ ، إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة $2y^3=-7x^2+3$ فإن $2y^3\equiv 3[7]$ وهذا غير ممكن إذن المعادلة $7x^2+2y^3=3$ لا تقبل حلا .

77 1) إذا كان x زوجيا فإن $3^x\equiv 1[8]$ وإذا كان x فرديا فإن $3^x\equiv 3[8]$.

2)

y	1	2	3	4	5	6	7	[8]
y^2	1	4	1	0	1	4	1	[8]

3) إذا كان x فرديا فإن $3^x\equiv 3[8]$ ومنه $y^2+8\equiv 3[8]$ إذن $y^2\equiv 3[8]$ وهذا غير ممكن .

4) $x=2n$ ؛ $3^{2n}-y^2=(3^n-y)(3^n+y)$ ، إذن $(3^n-y)(3^n+y)=8$ ومنه (3^n+y) قاسم للعدد 8 .

إذن $3^n+y\le 8$ بما أن y عدد طبيعي فإن $3^n\le 8$.

5) $3^n\le 8$ إذن $n=0$ أو $n=1$ ولدينا $y^2=3^{2n}-8$ إذن $y^2=1-8=-7$ أو $y^2=9-8=1$

وبالتالي $y=1$ ولدينا $x=2n=2$ وبالتالي الثنائية الوحيدة التي تحقق المعادلة هي $(2,1)$.

78 1) بواقي قسمة كل عدد طبيعي p على 3 هي 0 ، 1 و 2 وإذا كان p أوليا فإن $p\equiv 1[3]$ أو $p\equiv 2[3]$

إذن $p\equiv 1[3]$ أو $p\equiv -1[3]$.

2) p عدد طبيعي أولي إذن لا يقبل القسمة على 2 إذن هو فردي ومنه يوجد عدد طبيعي k حيث يكون $p=2k+1$

أي $p^2=4k^2+4k+1$ ويكافئ $p^2-1=4k(k+1)$

$n=p^4-1=(p^2-1)(p^2+1)$

$p^2+1=4k^2+4k+2=2(2k^2+2k+1)$ إذن $p^2+1=2\alpha$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$.

$k(k+1)$ هو عدد زوجي إذن $k(k+1)=2\beta$ مع $\beta\in\mathbb{N}$ ومنه $p^2-1=8\beta$.

وبالتالي $n=(p^2-1)(p^2+1)=16\alpha\beta$.

3)

p	1	2	3	4	[5]
p^4	1	1	1	1	[5]
p^4-1	0	0	0	0	[5]

79 1) أ - $999\equiv 0[111]$ ومنه $1000\equiv 1[111]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $1000n\equiv n[111]$.

ب - $111\,111=111\,000+111$ بوضع $n=111$ نحصل على $n\equiv 0[111]$ و $1000n\equiv n[111]$ ومنه $1000n\equiv 0[111]$ إذن $1000n+n\equiv 0[111]$.

$100\,010\,001=1000\,10000+1$ ؛ $100\,010\,001=1000\,00000+10000+1$

$100\,010\,001=1000(1000\times100+10)+1$

$1000\times100+10\equiv 100+10[111]$ ومنه $1000(1000\times100+10)\equiv 110[111]$ إذن

$1000(1000\times100+10)+1\equiv 111[111]$؛ $1000(1000\times100+10)+1\equiv 0[111]$ ؛ $100\,010\,001\equiv 0[111]$.

$\alpha=100\,010\,000\,001$.

$\alpha=100\,010\,000\,000+1$ ؛ $\alpha=1000^2(100\,0\times100+10)+1$ إذن $\alpha\equiv 100+10+1[111]$ أي $\alpha\equiv 0[111]$.

2) $99999\equiv 0[11\,111]$ ومنه $100000\equiv 1[11\,111]$. نضع $n=100000$

$\beta=1\,001\,001\,001\,001$ ؛ $\beta=1\,001\,001\,000\,000+1000+1$ ؛ $\beta=(1\,001\,000\,0+10)n+1000+1$ ؛

$\beta=(1\,000\,000\,0+1\,000\,0+10)n+1000+1$

$\beta=(1\,00n+1\,000\,0+10)n+1000+1$

$\beta\equiv 10110+1001[11\,111]$ ؛ $\beta\equiv 11111[11\,111]$ ، $\beta\equiv 0[11\,111]$.

80 1) $a=8k+2$ ؛ $a=104k'+r$ ومنه $104k'+r=8k+2$ أي $r=8(k-13k')+2$ إذن $r\equiv 2[8]$

ب - $r=8\alpha+2$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$ و $8\alpha+2<104$ أي $\alpha<\frac{102}{8}$ ؛ $\alpha<12$.

2) $a=13k+3$ ؛ $a=104k'+r$ ومنه $104k'+r=13k+3$ أي $r=13(k-8k')+3$ إذن $r\equiv 3[13]$.

ب ـــ $r=13\beta+3$ مع $\beta\in\mathbb{N}$ و $13\beta+3<104$ أي $\beta<\frac{101}{13}$ ؛ $\beta<7$.

3) من 1) نلاحظ أن r عدد زوجي إذن من 2) يجب أن يكون β فرديا إذن $r\in\{16,42,68,94\}$

ولكن يجب أن يكون $\frac{r-2}{8}\in\mathbb{N}$ والقيمة الوحيدة التي تحقق هي $r=42$.

81 1) $5\equiv5[11]$, $5^2\equiv3[11]$, $5^3\equiv4[11]$, $5^4\equiv9[11]$, $5^5\equiv1[11]$.

2) $5^5\equiv1[11]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $5^{5p}\equiv1[11]$.

وإذا كان $k\in\{1,2,3,4\}$ فإن $5^k\times5^{5p}\equiv5^k[11]$ أي $5^{5p+k}\equiv5^k[11]$.

ومنه $5^{5p+1}\equiv5[11]$, $5^{5p+2}\equiv5^2[11]$, $5^{5p+3}\equiv5^3[11]$, $5^{5p+4}\equiv5^4[11]$.

إذن $5^{5p+1}\equiv5[11]$, $5^{5p+2}\equiv3[11]$, $5^{5p+3}\equiv4[11]$, $5^{5p+4}\equiv9[11]$.

3) $1428=5\times245+3$, $2008=5\times401+3$ ومنه $5^{2008}-5^{1428}\equiv(4-4)[11]$ أي $5^{2008}-5^{1428}\equiv0[11]$.

82 1) $3\equiv3[7]$, $3^2\equiv2[7]$, $3^3\equiv6[7]$, $3^4\equiv4[7]$, $3^5\equiv5[7]$ و $3^6\equiv1[7]$.

2) $3^6\equiv1[7]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $3^{6P}\equiv1[7]$

وإذا كان $k\in\{1,2,3,4,5\}$ فإن $3^k\times3^{6P}\equiv3^k[7]$ أي $3^{6P+k}\equiv3^k[7]$.

ومنه $3^{6P+1}\equiv3[7]$, $3^{6P+2}\equiv2[7]$, $3^{6P+3}\equiv6[7]$, $3^{6P+4}\equiv4[7]$, $3^{6P+5}\equiv5[7]$.

3) $1988=6\times331+2$ ومنه $3^{1988}\equiv2[7]$.

$10\equiv3[7]$ ومنه $10^{1408}\equiv3^{1408}[7]$ ولدينا $1408=6\times234+4$ إذن $3^{1408}\equiv4[7]$ وبالتالي $10^{1408}\equiv4[7]$.

$9\equiv2[7]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $9^{3n+2}\equiv2^{3n+2}[7]$.

ولدينا $2^{3n+2}=4\times2^{3n}=4\times8^n$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $4\times8^n\equiv4\times1[7]$ إذن $9^{3n+2}\equiv4[7]$

الاستنتاج $3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2}\equiv(2+4+4)[7]$ ومنه $3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2}\equiv10[7]$ إذن

$3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2}\equiv3[7]$.

إذن باقي القسمة الأقليدية للعدد $(3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2})$ على 7 هو 3 .

83 1) $2\equiv2[5]$, $2^2\equiv4[5]$, $2^3\equiv3[5]$, $2^4\equiv1[5]$.

الاستنتاجات : $2^4\equiv1[5]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $2^{4p}\equiv1[5]$

إذن $2^{4p+1}\equiv2[5]$, $2^{4p+2}\equiv4[5]$, $2^{4p+3}\equiv3[5]$.

$3\equiv-2[5]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $3^{4p}\equiv2^{4p}[5]$ أي $3^{4p}\equiv1[5]$

وبالتالي $3^{4p+1}\equiv3[5]$ ، $3^{4p+2}\equiv9[5]$ ومنه $3^{4p+2}\equiv4[5]$, $3^{4p+3}\equiv27[5]$ ومنه $3^{4p+3}\equiv2[5]$.

$n=$	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$	$p\in\mathbb{N}$
$2^n\equiv$	1	2	4	3	$[5]$
$3^n\equiv$	1	3	4	2	$[5]$

2) $14=4\times3+2$ إذن $2^{14}\equiv4[5]$.

$10=4\times2+2$ إذن $3^{10}\equiv4[5]$.

3) $2\times3^{4n+1}-2^{4n}\equiv2\times3-1[5]$ ومنه $2\times3^{4n+1}-2^{4n}\equiv5[5]$

بما أن $5\equiv0[5]$ فإن $2\times3^{4n+1}-2^{4n}\equiv0[5]$.

84 1) $5\equiv-2[7]$ ومنه $5^3\equiv-8[7]$ أي $5^3\equiv-1[7]$ إذن $5^6\equiv1[7]$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k، $5^{6k}\equiv1[7]$

ويكون لدينا : $5^{6k+1}\equiv5[7]$

$5^{6k+2}\equiv25[7]$ أي $5^{6k+2}\equiv4[7]$

$5^{6k+3}\equiv20[7]$ أي $5^{6k+3}\equiv6[7]$

$5^{6k+4}\equiv30[7]$ أي $5^{6k+4}\equiv2[7]$

$5^{6k+5}\equiv10[7]$ أي $5^{6k+5}\equiv3[7]$.

2) $6\equiv-1[7]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $6^{2n}\equiv(-1)^2[7]$ أي $6^{2n}\equiv1[7]$.

3) $5^n+6^{2n}+3\equiv(5^n+4)[7]$

$5^n+6^{2n}+3\equiv0[7]$ معناه $5^n+4\equiv0[7]$ ومعناه $5^n\equiv-4[7]$ ومعناه $5^n\equiv3[7]$ ومعناه $n=5k+6$ مع $k\in\mathbb{N}$.

85 1) لدينا $2^4=16$ ومنه $2^4\equiv1[5]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي p ، $2^{4p}\equiv1[5]$

$2^{4p+1}\equiv2[5]$ ، $2^{4p+2}\equiv4[5]$ ،

$2^{4p+3}\equiv8[5]$ أي $2^{4p+3}\equiv3[5]$.

2) لدينا $2^3=8$ ومنه $2^3\equiv1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k ، $2^{3k}\equiv1[7]$

$2^{3k+1}\equiv2[7]$ ، $2^{3k+2}\equiv4[7]$.

3) لدينا $\begin{cases}2^{4p+2}\equiv4[5]\\2^{3k+2}\equiv4[7]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}n=4p+2\\n=3k+2\end{cases}$ ومعناه $\begin{cases}n\equiv2[4]\\n\equiv2[3]\end{cases}$ ومعناه $\begin{cases}3n\equiv6[12]\\4n\equiv8[12]\end{cases}$ ومنه $n\equiv2[12]$

وعكسيا لدينا إذا كان $n\equiv2[12]$ فإن $n=12m+2$ ومنه $n=3(4m)+2$ و $n=4(3m)+2$ ومنه

$\begin{cases}2^n\equiv4[5]\\2^n\equiv4[7]\end{cases}$.

86 $(n-1)$ مضاعف للعدد 3 معناه $n=3k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$.

$[1+(n-1)2^n]$ يقبل القسمة على 7 معناه $1+(n-1)2^n\equiv0[7]$ ومنه $1+(3k)2^{3k+1}\equiv0[7]$

يكافئ $1+3k(2^3)^k\times2\equiv0[7]$ ومعناه $1+6k\equiv0[7]$ أي $-k\equiv-1[7]$ يكافئ $k\equiv1[7]$

إذن $n=3k+1=3(7p+1)+1$ أي $n=21p+4$.

وعكسيا إذا كان $n=21p+4$ فإن $n-1=21p+3$ ومنه $(n-1)$ مضاعف للعدد 3 و $n-1\equiv 3[7]$

وكذلك $2^n=2^{21p+4}=2\left(2^3\right)^{7p+1}$ وبما أن $2^3\equiv 1[7]$ فإن $2^n\equiv 2[7]$. ومنه $1+(n-1)2^n\equiv(1+3\times 2)[7]$ أي $1+(n-1)2^n\equiv 0[7]$.

88 1) $4\equiv 4[11]$ ، $4^2\equiv 5[11]$ ، $4^3\equiv 9[11]$ ، $4^4\equiv 3[11]$ ، $4^5\equiv 1[11]$.

ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $4^{5p}\equiv 1[11]$ وعليه $4^{5p+1}\equiv 4[11]$ ، $4^{5p+2}\equiv 5[11]$ ، $4^{5p+3}\equiv 9[11]$ ، $4^{5p+4}\equiv 3[11]$.

2) $1995\equiv 4[11]$ ومنه $1995^n\equiv 4^n[11]$.

$26\equiv 4[11]$ ومنه $26^{10n+2}\equiv 4^{10n+2}[11]$ ولدينا $4^{10n+2}=4^{5(2n)+2}=4^{5p+2}$ ومنه $4^{10n+2}\equiv 5[11]$ إذن $26^{10n+2}\equiv 5[11]$

إذن $6\times 1995^n+26^{10n+2}+7\equiv\left(6\times 4^n+5+7\right)[11]$ أي $6\times 1995^n+26^{10n+2}+7\equiv\left(6\times 4^n+1\right)[11]$

وبالتالي $6\times 1995^n+26^{10n+2}+7\equiv 0[11]$ معناه $6\times 4^n+1\equiv 0[11]$ ويكافئ $2\left(6\times 4^n+1\right)\equiv 0[11]$ أي $4^n+2\equiv 0[11]$ ومعناه $4^n\equiv 9[11]$

ومعناه $n=5p+3$ مع $p\in\mathbb{N}$.

89 1) $5\equiv -2[7]$ ومنه $5^3\equiv -1[7]$ إذن $5^6\equiv 1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي p ، $5^{6p}\equiv 1[7]$ وعليه : $5^{6p+1}\equiv 5[7]$ ، $5^{6p+2}\equiv 4[7]$ ، $5^{6p+3}\equiv 6[7]$ ، $5^{6p+4}\equiv 2[7]$ ، $5^{6p+5}\equiv 3[7]$.

2) لدينا $26\equiv 5[7]$ و $47\equiv 5[7]$

إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $26^{6n+5}\equiv 5^{6n+5}[7]$ و $47^{12n+2}\equiv 5^{6(2n)+2}[7]$ وعليه $26^{6n+5}\equiv 3[7]$ و $47^{12n+2}\equiv 4[7]$.

$26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\equiv(3+2\times 4+3)[7]$ أي $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\equiv 14[7]$ ويكافئ $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\equiv 0[7]$.

3) $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+5n\equiv 0[7]$ معناه $4+5n\equiv 0[7]$ ويكافئ $3(4+5n)\equiv 0[7]$ ومعناه $12+n\equiv 0[7]$ أي $n\equiv 2[7]$.

90 1) $3^3=27$ ومنه $3^3\equiv 1[13]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي p ، $3^{3p}\equiv 1[13]$ وعليه $3^{3p+1}\equiv 3[13]$ ، $3^{3p+2}\equiv 9[13]$.

2) $4\left(3^{n+1}-1\right)\equiv 0[13]$ يكافئ $40\left(3^{n+1}-1\right)\equiv 0[13]$ ويكافئ $3^{n+1}-1\equiv 0[13]$ معناه $3^{n+1}\equiv 1[13]$ ومعناه $n+1\equiv 0[3]$ أي $n\equiv 2[3]$.

91 $16\equiv 2[7]$ إذن $16^3\equiv 2^3[7]$ أي $16^3\equiv 1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي p ، $16^{3p}\equiv 1[7]$.

إذا كان $n=3p$ فإن $15\left(16^{n+1}-1\right)=15\left(16\times 16^{3p}-1\right)$ ومنه $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv 1(2\times 1-1)[7]$ أي $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv 1[7]$

إذا كان $n=3p+1$ فإن $15\left(16^{n+1}-1\right)=15\left(16^2\times16^{3p}-1\right)$ ومنه $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv1(4\times1-1)[7]$
أي $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv3[7]$.

إذا كان $n=3p+2$ فإن $15\left(16^{n+1}-1\right)=15\left(16^3\times16^{3p}-1\right)$ ومنه $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv1(8\times1-1)[7]$ أي
$15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv0[7]$.

92 1) ـ أ ـ $3^4=81$ ومنه $3^4\equiv1[10]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي p ، $3^{4p}\equiv1[10]$ وعليه
$3^{4p+1}\equiv3[10]$ ، $3^{4p+2}\equiv9[10]$ ، $3^{4p+3}\equiv7[10]$

ـ ب ـ $9^{2001}=3^{4002}=3^{4\times1000+2}$ ومنه $63\times9^{2001}\equiv3\times9[10]$ أي $63\times9^{2001}\equiv7[10]$.

$7\equiv-3[10]$ ومنه $7^{1422}\equiv(-3)^{1422}[10]$ أي $7^{1422}\equiv3^{4\times355+2}[10]$ معناه $7^{1422}\equiv9[10]$.

إذن $63\times9^{2001}-7^{1422}\equiv(7-9)[10]$ معناه $63\times9^{2001}-7^{1422}\equiv-2[10]$ أي $63\times9^{2001}-7^{1422}\equiv8[10]$.

2) **- أ -** لدينا $3n\times9^n=3n\times3^{2n}=n\times3^{2n+1}$

ولدينا $7\equiv-3[10]$ ومنه $7^{2n+1}\equiv(-3)^{2n+1}[10]$ أي $7^{2n+1}\equiv-3^{2n+1}[10]$

إذن $3n\times9^n+7^{2n+1}\equiv\left(n3^{2n+1}-3^{2n+1}\right)[10]$

أي $3n\times9^n+7^{2n+1}\equiv(n-1)3^{2n+1}[10]$.

- ب - $3n\times9^n+7^{2n+1}\equiv0[10]$ معناه $(n-1)3^{2n+1}\equiv0[10]$ ومعناه $3^{2n+3}(n-1)3^{2n+1}\equiv0[10]$ أي
$(n-1)3^{4n+4}\equiv0[10]$ ويكافئ $n-1\equiv0[10]$ أي $n\equiv1[10]$.

93 1) $27\equiv-1[7]$ أي $3^3\equiv-1[7]$ ومنه $3^6\equiv1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k ، $3^{6k}\equiv1[7]$ وعليه
$3^{6k+1}\equiv3[7]$ ، $3^{6k+2}\equiv2[7]$ ، $3^{6k+3}\equiv6[7]$ ، $3^{6k+4}\equiv4[7]$ ، $3^{6k+5}\equiv5[7]$.

$64\equiv1[7]$ ومنه $4^3\equiv1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي p ، $4^{3p}\equiv1[7]$ وعليه $4^{3p+1}\equiv4[7]$ ،
$4^{3p+2}\equiv2[7]$.

2) $2006\equiv4[7]$ ؛ $1424\equiv3[7]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $2006^{3n+2}\equiv4^{3n+2}[7]$ ؛ $1424^{6n+1}\equiv3^{6n+1}[7]$
ومنه $2006^{3n+2}\equiv2[7]$ ؛ $1424^{6n+1}\equiv3[7]$ إذن $2\times2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\equiv(2\times2+3)[7]$ أي
$2\times2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\equiv0[7]$.

3) $2\times3^0+2\times3^1+...+2\times3^n=2\left(3^0+3^1+...+3^n\right)$

$2\times3^0+2\times3^1+...+2\times3^n=3^{n+1}-1$

$3\times4^0+3\times4^1+...+3\times4^n=3\left(4^0+4^1+...+4^n\right)$

$3\times4^0+3\times4^1+...+3\times4^n=4^{n+1}-1$ إذن $s_n=u_0+u_1+...+u_n=3^{n+1}+4^{n+1}-2$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$3^{n+1}\equiv$	3	2	6	4	5	1	$[7]$
$4^{n+1}\equiv$	4	2	1	4	2	1	
$s_n\equiv$	5	2	5	6	5	0	

94 1) $49\equiv-1[10]$ أي $7^2\equiv-1[10]$ ومنه $7^4\equiv1[10]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k ، $7^{4k}\equiv1[10]$
وعليه $7^{4k+1}\equiv7[10]$ ، $7^{4k+2}\equiv9[10]$ ، $7^{4k+3}\equiv3[10]$.

. $7^{4k}+7^{4k+1}+7^{4k+2}+7^{4k+3}=(1+7+9+3)[10]$

. $7^{4k}+7^{4k+1}+7^{4k+2}+7^{4k+3}=0[10]$

2) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $S_n=1+7+7^2+...+7^n$

$S_{n+4}=S_n+7^{n+1}+7^{n+2}+7^{n+3}+7^{n+4}$

$S_{n+4}=S_n+7^{n+1}\left(1+7+7^2+7^3\right)$

$1+7+7^2+7^3\equiv 0[10]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+4}=S_n[10]$.

$S_0=1$ ، $S_0\equiv 1[10]$ ؛ $S_1=8$ ، $S_1\equiv 8[10]$ ؛ $S_2=57$ ، $S_2\equiv 7[10]$ ؛ $S_3=400$ ، $S_3\equiv 0[10]$ ؛

$S_4=2801$ ، $S_4\equiv 1[10]$.

لنرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $S_{4n}\equiv 1[10]$.

$S_0\equiv 1[10]$. ونفرض أن $S_{4p}\equiv 1[10]$.

لدينا $S_{4(p+1)}=S_{4p+4}$ وحسب السؤال السابق $S_{4p+4}=S_{4p}[10]$ إذن $S_{4(p+1)}\equiv 1[10]$ وبالتالي حسب مبدأ التراجع ينتج من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $S_{4n}\equiv 1[10]$.

$S_{4n+1}=S_{4n}+7^{4n+1}$ ومنه $S_{4n+1}\equiv 1+7[10]$ أي $S_{4n+1}\equiv 8[10]$.

$S_{4n+2}=S_{4n+1}+7^{4n+2}$ ومنه $S_{4n+2}\equiv(8+9)[10]$ أي $S_{4n+2}\equiv 7[10]$.

$S_{4n+3}=S_{4n+2}+7^{4n+3}$ ومنه $S_{4n+3}\equiv(7+3)[10]$ أي $S_{4n+3}\equiv 0[10]$.

2 - أنظمة التعداد

95 نفرض $7>x>0$ و $7>y>0$. $\overline{yx}=10y+x$ و $\overline{xy}=7x+y$ إذن $7x+y=10y+x$ أي $6x=9y$ معناه $2x=3y$ ومنه $2x\equiv 0[3]$ أي $4x\equiv 0[3]$ معناه $x\equiv 0[3]$ وبالتالي $x=3$ أو $x=6$

إذن $(x,y)=(3,2)$ أو $(x,y)=(6,4)$

96 الشروط : $7>x>0$ ، $7>z>0$ ، $0\le y<7$.

$n=\overline{xyz}=7^2x+7y+z$ و $n=\overline{zyx}=11^2z+11y+x$ ومنه $49x+7y+z=121z+11y+x$ أي :

$48x-4y-120z=0$ وهذا يكافئ $12x-y-30z=0$ معناه $y=12x-30z=6(2x-5z)$

إذن $y\equiv 0[6]$ ولدينا $0\le y<7$ إذن $y=0$ أو $y=6$

إذا كان $y=0$ فإن $6(2x-5z)=0$ أي $2x=5z$ ومنه $2x\equiv 0[5]$ معناه $6x\equiv 0[5]$ أي $x\equiv 0[5]$ بما أن $7>x>0$ فإن $x=5$ ومنه $z=2$.

إذا كان $y=6$ فإن $6(2x-5z)=6$ أي $2x=5z+1$ ومنه $2x\equiv 1[5]$ معناه $6x\equiv 3[5]$ أي $x\equiv 3[5]$ بما أن $7>x>0$ فإن $x=3$ ومنه $z=1$. $(x,y,z)=(5,0,2)$ أو $(x,y,z)=(3,6,1)$

97 $a>6$ ؛ $b+c=\overline{46}=4a+6$ ؛ $bc=\overline{555}=5a^2+5a+5$

b و c هما حلا للمعادلة $x^2-2(2a+3)x+\left(5a^2+5a+5\right)=0$ حيث x هو المجهول

$\Delta'=(2a+3)^2-\left(5a^2+5a+5\right)$ ؛ $\Delta'=-a^2+7a+4$ ؛ $\delta=49+16=65$

$\Delta'\ge 0$ معناه $\frac{7-\sqrt{65}}{2}\le a\le\frac{7+\sqrt{65}}{2}$ ومنه $6<a\le 7,53$ إذن $a=7$.

ومنه المعادلة تصبح $x^2-2(17)x+285=0$ و $\Delta'=4$ إذن $x'=17-2=15$ و $x'=17+2=19$.

بما أن $1 \le a \le b \le c$ فإن $(a,b,c)=(7,15,19)$. ويكون $abc=1995$.

98 1) $45x-28y=130$ معناه $45x=130+28y=2(65+14y)$ ؛ $45x\equiv 0[2]$ أي $x\equiv 0[2]$.

$45x-28y=130$ معناه $28y=45x+130=5(9x+26)$ ومنه $28y\equiv 0[5]$ أي $56y\equiv 0[5]$ ومعناه $y\equiv 0[5]$.

2) $0\le\alpha\le 9$ و $0\le\beta\le 7$ ؛ $n=2\times 9^3+9^2\alpha+9\alpha+3=90\alpha+1461$ ؛

$n=5\times 7^3+7^2\beta+7\beta+6=56\beta+1721$.

إذن $90\alpha+1461=56\beta+1721$ ومعناه $90\alpha-56\beta=260$ أي $45\alpha-28\beta=130$

إذن $\alpha\equiv 0[2]$ و $\beta\equiv 0[5]$ بما أن $0\le\beta\le 7$ فإن $\beta=0$ أو $\beta=5$.

إذا كان $\beta=0$ فإن $45\alpha=130$ أي $\alpha=\frac{28}{9}$ مرفوض.

إذا كان $\beta=5$ فإن $45\alpha=270$ أي $\alpha=6$. إذن $n=90\alpha+1461=2001$.

99 $0<x<7$ ، $0<y<7$ و $0\le z<7$.

$N=11^3x+11^2y+11z+x$ أي $N=1332x+121y+11z$

$N=7^3y+7^2y+7x+z$ أي $N=392y+7x+z$

إذن $1332x+121y+11z=392y+7x+z$ أي $1325x+10z=271y$ أي $5(265x+2z)=271y$

إذن $271y\equiv 0[5]$ ومعناه $y\equiv 0[5]$ بما أن $0<y<7$ فإن $y=5$.

وبالتالي $265x+2z=271$ أي $265x=271-2z$ ومنه $265x=271[2]$ أي $x\equiv 1[2]$

بما أن $0<x<7$ فإن $x=1$ أو $x=3$ أو $x=5$.

إذا كان $x=1$ فإن $z=3$

إذا كان $x=3$ فإن z يكون سالب

إذا كان $x=5$ فإن z يكون سالب

وبالتالي $(x,y,z)=(1,5,3)$.

100 $n=\overline{1271x}=9^4+2\times 9^3+7\times 9^2+9+x$

1) $n\equiv 1+2+7+1+x\,[8]$ أي $n\equiv 3+x\,[8]$.

يكون $n\equiv 0[8]$ معناه $x+3\equiv 0[8]$ أي $x\equiv 5[8]$ وبما أن $0\le x<9$ فإن $x=5$.

2) $n=\overline{1271x}=9^4+2\times 9^3+7\times 9^2+9+x$

$n=9^3(9+2)+7\times 9^2+9+x$ ؛ $n\equiv 4+x\,[11]$

يكون $n\equiv 0[11]$ معناه $x+4\equiv 0[11]$ أي $x\equiv 7[11]$ وبما أن $0\le x<9$ فإن $x=7$.

101 $0\le x\le 9$ و $0\le y\le 9$. $n=\overline{27x85y}$ ؛ $n=2\times 10^5+7\times 10^4+x\times 10^3+8\times 10^2+5\times 10+y$

$n\equiv 2+7+x+8+5+y\,[3]$ و $n\equiv -2+7-x+8-5+y\,[11]$

معناه $n\equiv x+1+y\,[3]$ و $n\equiv -x+8+y\,[11]$

$n\equiv 0[3]$ و $n\equiv 0[11]$ معناه $x+1+y\equiv 0[3]$ و $-x+8+y\equiv 0[11]$

أي $x+y\equiv 2[3]$ و $x-y\equiv 8[11]$.

$x-y\equiv 8[11]$ معناه $x-y\equiv -3[11]$

ومنه $(x,y)\in\{(0,3),(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),$
$(5,8),(6,9),(8,0),(9,1)\}$

بما أن $x+y\equiv 2[3]$ فإن $(x,y)\in\{(1,4),(4,7),(8,0)\}$

$n=\overline{271854}$ أو $n=\overline{274857}$ أو $n=\overline{278850}$.

102 1) إذا كان $3x\equiv 0[7]$ فإن $3\times 5x\equiv 0\times 5[7]$ وبما أن $15\equiv 1[7]$ فإن $x\equiv 0[7]$.

العكس إذا كان $x\equiv 0[7]$ فإن $3x\equiv 3\times 0[7]$ ومنه $3x\equiv 0[7]$.

2) $N=\overline{a_na_{n-1}...a_1a_0}$ أي $N=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_110+a_0$

$N'=\overline{a_na_{n-1}...a_1}$ أي $N'=a_n10^{n-1}+a_{n-1}10^{n-2}+...+a_210+a_1$ ومعناه

$10N'=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_210^2+a_110$ إذن $N=10N'+a_0$

$N\equiv 0[7]$ معناه $10N'+a_0\equiv 0[7]$ أي $3N'-6a_0\equiv 0[7]$ ويكافئ $3(N'-2a_0)\equiv 0[7]$ ومعناه

$N'-2a_0\equiv 0[7]$ وهذا حسب السؤال السابق .

3) $105154\equiv 0[7]$ يكافئ $10515-8\equiv 0[7]$ أي $10507\equiv 0[7]$ ويكافئ $1050-14\equiv 0[7]$ أي

$1036\equiv 0[7]$ ويكافئ $103-12\equiv 0[7]$ أي $91\equiv 0[7]$ ويكافئ $9-2\equiv 0[7]$ أي $7\equiv 0[7]$

خلاصة $7\equiv 0[7]$ معناه $105154\equiv 0[7]$.

$263572\equiv 0[7]$ معناه $26357-4\equiv 0[7]$ ؛ $26353\equiv 0[7]$ يكافئ $2635-6\equiv 0[7]$ ؛ $2629\equiv 0[7]$ يكافئ

$262-18\equiv 0[7]$ ؛ $244\equiv 0[7]$ يكافئ $24-8\equiv 0[7]$ أي $16\equiv 0[7]$ وهذا غير صحيح إذن 263572 لا يقبل

القسمة على 7 .

103 1) $N=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_110+a_0$ ، $N'=a_n10^{n-1}+a_{n-1}10^{n-2}+...+a_210+a_1$.

$N=10N'+a_0$. $N\equiv 0[13]$ معناه $10N'+a_0\equiv 0[13]$ ومعناه $4(10N'+a_0)\equiv 0[13]$ ويكافئ

$40N'+4a_0\equiv 0[13]$ أي $N'+4a_0\equiv 0[13]$ لأن $40\equiv 1[13]$

2) $1631216\equiv 0[13]$ معناه $163121+24\equiv 0[13]$ أي $163144\equiv 0[13]$ معناه $16314+16\equiv 0[13]$ أي

$16330\equiv 0[13]$ ومعناه $1633\equiv 0[13]$ ومعناه $163+12\equiv 0[13]$ أي $175\equiv 0[13]$ ومعناه $17+20\equiv 0[13]$

أي $37\equiv 0[13]$ وهذا تناقض إذن 1631216 لا يقبل القسمة على 13 .

$48662029\equiv 0[13]$ معناه $4866202+36\equiv 0[13]$ أي $4866238\equiv 0[13]$ معناه $486623+32\equiv 0[13]$ أي

$486655\equiv 0[13]$ معناه $48665+20\equiv 0[13]$ أي $48685\equiv 0[13]$ معناه $4868+20\equiv 0[13]$ أي

$4888\equiv 0[13]$ معناه $488+32\equiv 0[13]$ أي $520\equiv 0[13]$ معناه $52\equiv 0[13]$ أي $5+8\equiv 0[13]$ معناه

$13\equiv 0[13]$ وهذا صحيح إذن $48662029\equiv 0[13]$.

105 1) $(a^2+a+1)(a^2-a+1)=a^4+a^2+1$.

2) ليكن a عدد طبيعي حيث $a>1$. ولدينا $111=a^2+a+1$ أي $10101=1\times a^4+0\times a^3+1\times a^2+0\times a+1$

$10101=a^4+a^2+1$ معناه $10101=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$ أي $10101=111(a^2-a+1)$ ومنه 111 يقسم

10101 .

الحاصل هو $a^2-a+1=(a-1)a+1$ أي $a^2-a+1=\beta a+1=\overline{\beta 1}$.

106 1) في النظام التعداد ذي الأساس a لدينا $a+1=11$ و $1001=a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$

أي $1001=11(a^2-a+1)$ ومنه العدد 1001 يقبل القسمة على 11 .

2) الحاصل هو أي $a^2-a+1=(a-1)a+1=\overline{\beta 1}$.

3) $1001=11\times\overline{\beta 1}$

في النظام ذي الأساس 10 يكون $1001=11\times 91$

في النظام ذي الأساس 12 لدينا $\overline{1001}=12^3+1=1729$ ، $\overline{11}=12+1=13$ ، $\overline{\beta 1}=11\times 12+1=133$.

ولدينا $13\times 133=1729$.

107 1) ليكن a عدد طبيعي ، $(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1$ ومنه إذا كان $a>3$ فيكون في الأساس a ، $(a+1)^3=1331$.

2) $(a+1)^4=(a^3+3a^2+3a+1)(a+1)$ ؛ $(a+1)^4=a^4+4a^3+6a^2+4a+1$

ومنه إذا كان $a>6$ فيكون في الأساس a ، $(a+1)^4=14641$.

108 1) $n^2+2=(n^2+1)+1=\overline{11}$ ؛ $n^2+2n=(n^2+1)+(2n-1)=\overline{1(2n-1)}$ ؛

$(n^2+2)^2=\left[(n^2+1)+1\right]^2$ ؛ $(n^2+2)^2=(n^2+1)^2+2(n^2+1)+1=\overline{121}$ ؛

$n^4=(n^4-1)+1=(n^2-1)(n^2+1)+1$ ؛ $n^4=\overline{(n^2-1)1}$.

ـ التحقيق من أجل الأساس $a=5$ أي $n=2$.

$n^2+2=6$ و $\overline{11}=5+1=6$.

$n^2+2n=8$ و $\overline{1(2n-1)}=5+3=8$.

$(n^2+2)^2=36$ و $\overline{121}=5^2+2\times 5+1=36$.

$n^4=16$ و $\overline{(n^2-1)1}=3\times 5+1=16$.

ـ التحقيق من أجل الأساس $a=10$ أي $n=3$.

$n^2+2=11$ و $\overline{11}=10+1=11$.

$n^2+2n=15$ و $\overline{1(2n-1)}=10+5=15$.

$(n^2+2)^2=121$ و $\overline{121}=121$.

$n^4=81$ و $\overline{(n^2-1)1}=8\times 10+1=81$.

2) $u=n(n^2+2)=n(a+1)=na+n=\overline{nn}$

$v=n^2(n^2+2)=n^2(a+1)=n^2a+n^2=\overline{n^2n^2}$

$x=u^2=n^2(a+1)^2=n^2a^2+2n^2a+n^2$ ؛ $x=(a-1)a^2+2(a-1)a+n^2=a^3+a^2-2a+n^2$

$x=a^3+(a-2)a+n^2=a^3+(n^2-1)a+n^2$ ؛ $x=\overline{10(n^2-1)n^2}$.

$y=v^2=(n^2a+n^2)^2=n^4a^2+2n^4a+n^4$ ؛ $y=(a-1)^2a^2+2(a-1)^2a+(a-1)^2$ ؛

$y=a^4-2a^3+a^2+2a^3-4a^2+2a+a^2-2a+1$ ؛ $y=a^4-2a^2+1=\left(n^2+1\right)a^3-2a^2+1$

$y=a^4-2a^2+1=n^2a^3+a^2\left(a-2\right)+1$ ؛ $y=a^4-2a^2+1=n^2a^3+a^2\left(n^2-1\right)+1$

$y=a^4-2a^2+1=\overline{n^2\left(n^2-1\right)01}$.

المسائل

109 I) 1) نفترض أن a و b زوجيان معا ، معناه $a\equiv 0[2]$ و $b\equiv 0[2]$ ومنه $a^2\equiv 0[2]$ و $b^2\equiv 0[2]$

وبالتالي $a^2-b^2\equiv 0[2]$ أي $N\equiv 0[2]$.

نفترض أن a و b فرديان معا ، معناه $a\equiv 1[2]$ و $b\equiv 1[2]$ ومنه $a^2\equiv 1[2]$ و $b^2\equiv 1[2]$

وبالتالي $a^2-b^2\equiv 0[2]$ أي $N\equiv 0[2]$

إذن إذا كان a و b من نفس الشفعية فيكون N عددا طبيعيا زوجيا وهذا تناقض لأن N عدد طبيعي فردي وبالتالي a و b ليس من شفعية واحدة .

2) $N=a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$ ؛ بوضع $a-b=p$ و $a+b=q$ يكون $N=pq$.

3) بما أن a و b ليس من شفعية واحدة فإن مجموعهما وفرقهما يكونا فرديين أي p و q فرديين معا .

II) 1) أ -

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
x^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]

ب - $a^2-250507\equiv a^2-1[9]$

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
b^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]
$a^2-250507$	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]
a^2-1	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]
a^2	1	2	5	1	8	8	1	5	2	[9]

جـ-من السؤال أ ــ لا يمكن أن تكون الأعداد 2 ، 5 و 8 بواقي لمربع بترديد 9 وبالتالي $a^2\equiv 1[9]$ هي الحالة الوحيدة الممكنة وينتج أن $a\equiv 1[9]$ أو $a\equiv 8[9]$.

2) أ ــ $a^2-250507=b^2$ ومنه $a^2-250507\geq 0$ ويكافئ $a\leq -\sqrt{250507}$ أو $a\geq\sqrt{250507}$ بينما a عدد طبيعي إذن $a\geq\sqrt{250507}$ أي $a\geq 500,51$ ومنه $a\geq 501$.

ب ــ $a^2-250507=501^2-250507=494$ إذن $b^2=494$ أي $b=22,23$ إذن $a\neq 501$.

3) أ ــ نفرض $a\equiv 8[9]$ ، لدينا $503\equiv 8[9]$ معناه $503[9]\equiv 8$ ومنه $a\equiv 503[9]$.

نفرض $a\equiv 1[9]$ ، لدينا $505\equiv 1[9]$ معناه $505[9]\equiv 1$ ومنه $a\equiv 505[9]$.

ب ــ $a=505+9k$ معناه $a^2-250507=81k^2+9090k+4518$ ويكافئ $b^2=81k^2+9090k+4518$ أي $b^2=9\left(9k^2+1010k+502\right)$

من أجل $k=0$ لدينا $b^2=4518$ أي $b=3\sqrt{502}$ مرفوض .

من أجل $k=1$ لدينا $b^2=9\times 1521=117^2$ أي $b=117$ إذن أصغر عدد طبيعي k حيث تكون الثنائية $\left(505+9k\ ,b\right)$ تحقق العلاقة $\left(E\right)$ هو $k=1$ وبالتالي $\left(a,b\right)=\left(514,117\right)$.

III) 1) $a^2-250507=b^2$ معناه $250507=a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$ أي $250507=397\times 631$.

(2

	1	1	1	2	3	2	1	1	1	2	
631	397	234	163	71	21	8	5	3	2	1	0

إذن $p\gcd(631,397)=1$.

110 جزء I ــ

1) لدينا $1^2+3^2+5^2=35=4\times8+3$ ومنه $1^2+3^2+5^2\equiv3[4]$ أي $1^2+3^2+5^2\equiv2^2-1\left[2^2\right]$

2) نفترض أن $n=3$.

أ-

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R	0	1	4	1	0	1	4	1

ب - من أجل كل ثلاث أعداد R_1 ، R_2 و R_3 من المجموعة $\{0,1,4\}$ يكون $R_1+R_2+R_3\neq0$.

إذن لا يمكن إيجاد x ، y و z حيث $x^2+y^2+z^2\equiv7[8]$.

الجزء II ــ دراسة الحالة العامة مع $n\geq3$.

1) لدينا $x^2+y^2+z^2\equiv\left(2^n-1\right)\left[2^n\right]$ معناه $x^2+y^2+z^2=2^np+2^n-1=2^n(p+1)-1$ ومنه $x^2+y^2+z^2$ عدد فردي .

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$.

إذن $(x+y+z)^2$ هو عدد فردي وبالتالي $x+y+z$ عدد فردي .

إذن تكون الأعداد x ، y و z كلها فردية أو واحد منها فري وآخرين زوجيين .

2) نفترض أن x و y زوجيان و z فردي .

أ - $x=2p$ ، $y=2k$ و $z=2l+1$ ومنه $x^2=4p^2$ ، $y^2=4k$ و $z^2=4l^2+4l+1$ إذن $x^2\equiv0[4]$ ، $y^2\equiv0[4]$ و $z^2\equiv1[4]$ وبالتالي $x^2+y^2+z^2\equiv1[4]$.

ب - بما أن $n\geq3$ فإن $2^n\equiv0[4]$ أي $2^n=4\alpha$ ولدينا $x^2+y^2+z^2=2^np+2^n-1=2^n(p+1)-1$ أي $x^2+y^2+z^2=4\alpha(p+1)-1$ وبالتالي $x^2+y^2+z^2\equiv-1[4]$ أي $x^2+y^2+z^2\equiv3[4]$ وهذا تناقض مع النتيجة السابقة .

3) نفترض أن x ، y و z كلها فردية .

أ - $k^2+k=k(k+1)$ جداء عددين متتاليين هو عدد زوجي أي $k^2+k\equiv0[2]$.

ب - ليكن t عدد طبيعي فردي أي $t=2k+1$ ومنه $t^2=4k^2+4k+1=4\left(k^2+k\right)+1$ وبما أن $k^2+k\equiv0[2]$ فإن $k^2+k\equiv2k'$ إذن $t^2=8k'+1$ أي $t^2\equiv1[8]$

بما أن x ، y و z كلها فردية . فإن $x^2\equiv1[8]$ ، $y^2\equiv1[8]$ و $z^2\equiv1[8]$ وبالتالي $x^2+y^2+z^2\equiv3[8]$.

جـ - الخلاصة : $x^2+y^2+z^2=2^n(p+1)-1$

من أجل $n\geq3$ يكون $2^n\equiv0[8]$ إذن $x^2+y^2+z^2\equiv-1[8]$ أي $x^2+y^2+z^2\equiv7[8]$ وهذا تناقض مع النتيجة $x^2+y^2+z^2\equiv3[8]$

إذن لا توجد أي ثلاثية (x,y,z) تحقق $x^2+y^2+z^2\equiv\left(2^n-1\right)\left[2^n\right]$ مع $n\geq3$ سواء كانت x ، y و z كلها فردية أو واحد منها فردي والآخرين زوجيين ؛ وبالتالي $n=2$ هي الحالة الوحيدة التي توجد فيها ثلاثية (x,y,z) تحقق $x^2+y^2+z^2\equiv\left(2^n-1\right)\left[2^n\right]$