

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

(1) كتابة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي :

$$\text{لدينا : } z_A = 1 - i \text{ ومنه : } |z_A| = |1 - i| = \sqrt{2}$$

$$\text{وبالتالي : } z_A = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{ولدينا : } z_B = -1 + i \text{ ومنه : ومنه : } |z_B| = |-1 + i| = \sqrt{2}$$

$$\text{ومنه : } z_B = -1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\text{(لاحظ أن : } z_B = -1 + i = -(1 - i) = -z_A \text{)}$$

$$\text{ولدينا : } z_C = \sqrt{3}(1 + i) \text{ ومنه : } |z_C| = |\sqrt{3}(1 + i)| = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

$$\text{ومنه : } z_C = \sqrt{3}(1 + i) = \sqrt{6} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(2) أ- حساب الطوية وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$:

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1 + i - 1 + i}{\sqrt{3} + i \sqrt{3} - 1 + i} = \frac{-2 + 2i}{\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{-2 + 2i}{\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)} \times \frac{\sqrt{3} - 1 - i(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} - 1 - i(\sqrt{3} + 1)}$$

$$\text{ومنه : } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{4 + 4i\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right) = \arg \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{\pi}{3} \end{array} \right. \quad \text{وبالتالي :}$$

• التفسير الهندسي للنتائج المحصل عليها :

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = (\vec{AC}; \vec{AB}) \quad \text{و} \quad \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{AB}{AC}$$

$$(\vec{AC}; \vec{AB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad \text{و} \quad AB = AC \quad \text{أي} \quad \frac{AB}{AC} = 1$$

ب- تحديد طبيعة المثلث ABC :

من $AB = AC$ و $(\vec{AC}; \vec{AB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

3) تعيين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معينًا :
نعلم أن المثلث ABC متقايس الأضلاع ، لكي يكون الرباعي $ACBD$ معينًا يكفي أن يكون القطران $[AB]$ و $[CD]$ متناصفان في النقطة O وهذا يعني أن النقطة D هي نظيرة النقطة C بالنسبة إلى O

$$\text{ومنه : } z_D = -z_C = -\sqrt{3}(1+i)$$

4) أ- تعيين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة :

لدينا : $z' = (-1+i)z + 1 - 3i$ وبالتالي فإن العبارة المركبة للتحويل T

من الشكل $z' = az + b$ مع $a = -1+i$ و $b = 1 - 3i$ وبما أن :
 $|a| = \sqrt{2}$ نستنتج أن T هو تشابه مباشر : نسبته $k = |a| = \sqrt{2}$ ، زاويته

$\theta = \arg(a) = \frac{3\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة z_Ω حيث :

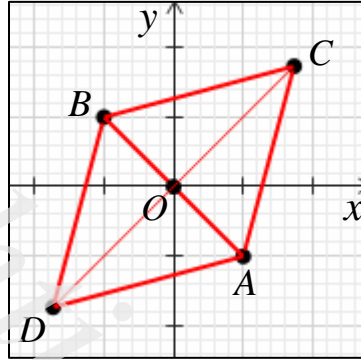
$$z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1-3i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = 1-i = z_A \quad \text{ومنه : } z_\Omega = \frac{b}{1-a}$$

أي أن مركز التشابه T هو النقطة A .

ب- استنتاج طبيعة التحويل $T \circ T$ وعناصره المميزة :

تذكير : إذا كان $S(\Omega; k; \theta)$ و $S'(\Omega; k'; \theta')$ تشابهين غير مباشرين فإن المركب $S \circ S'$ هو تشابه غير مباشر حيث : $S \circ S' = S''(\Omega; kk'; \theta + \theta')$ وعليه فإن $T \circ T$ هو تشابه غير مباشر مركزه النقطة A ، نسبته $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ ،

$$\text{وزاويته } \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$



التمرين الثاني :

(1) أ- إثبات أن النقط A ، B و C تعين مستويا :
 تذكير : A ، B و C تعين مستويا معناه : A ، B و C ليست في استقامية .
 A ، B و C ليست في استقامية معناه : الشعاعان \vec{AB} و \vec{AC} غير

مرتبطين خطيا .
 \vec{AB} و \vec{AC} غير مرتبطين خطيا معناه : لا يوجد عدد حقيقي t حيث :
 $\vec{AC} = t \vec{AB}$

لدينا : $\vec{AB}(0; 1; 2)$ و $\vec{AC}(-2; 1; -1)$

واضح أن الشعاعين \vec{AB} و \vec{AC} غير مرتبطين خطيا لأن مثلا : $\frac{0}{-2} \neq \frac{1}{1}$

ب- تبيان أن $\vec{n}(3; 4; -2)$ عمودي على كل من \vec{AB} و \vec{AC} :
 لدينا : $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 3 \times 0 + 4 \times 1 - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0$ ومنه : $\vec{n} \perp \vec{AB}$
 ولدينا : $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 3 \times (-2) + 4 \times 1 - 2 \times (-1) = 0$ ومنه : $\vec{n} \perp \vec{AC}$
 استنتاج معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) :

$\vec{n}(3; 4; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) وبالتالي فإن معادلته من

الشكل : $3x + 4y - 2z + d = 0$ ، وبما أن $A \in (ABC)$ فإن :

$$d = 1 \text{ ومنه } 3 \times 1 + 4 \times 0 - 2 \times 2 + d = 0$$

إذن : معادلة للمستوي (ABC) هي $3x + 4y - 2z + 1 = 0$

(2) أ- تبيان أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان :

$\vec{n}_1(3; 4; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_1)

$\vec{n}_2(2; -2; -1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2)

لدينا : $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3 \times 2 + 4 \times (-2) - 2 \times (-1) = 0$ ومنه : $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

إذن : المستويان (P_1) و (P_2) متعامدان .

ب- تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) :

$$\text{لدينا : } \begin{cases} 3x + 4y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} z = 2x - 2y - 1 \\ 3x + 4y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{وبالتالي : } \begin{cases} z = 2x - 2y - 1 \\ 3x + 4y - 2(2x - 2y - 1) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{وبعد التبسيط نحصل على الجملة : } \begin{cases} z = 2x - 2y - 1 \\ -x + 8y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ومنه : } \begin{cases} x = 8y + 3 \\ z = 2(8y + 3) - 2y - 1 = 14y + 7 \end{cases}$$

$$\text{وبوضع } y = t \text{ نحصل على الجملة : } \begin{cases} x = 8t + 3 \\ y = t \\ z = 14t + 5 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

تمثل هذه الجملة الأخيرة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) . (توجد ثلاثيات أخرى)

ج- التحقق أن النقطة $O(0; 0; 0)$ لا تنتمي إلى (Δ) :

$$\text{من الجملة : } \begin{cases} 0 = 8t + 3 \\ 0 = t \\ 0 = 14t + 5 \end{cases} \text{ نجد : } \begin{cases} t = -\frac{3}{8} \\ t = 0 \\ t = -\frac{5}{14} \end{cases} \text{ وهذا مستحيل}$$

نستنتج أن النقطة $O(0; 0; 0)$ لا تنتمي إلى (Δ) .

د- حساب المسافتين $d(O; (P_1))$ و $d(O; (P_2))$:

تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0; y_0; z_0)$ والمستوي (P) ذي

المعادلة $ax + by + cz + d = 0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A; (P))$ حيث :

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

وباستعمال المساواة المؤطرة نجد :

$$d_1 = d(O ; (P_1)) = \frac{|0+0+0+1|}{\sqrt{9+16+4}} = \frac{1}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{29}$$

$$d_2 = d(O ; (P_2)) = \frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3}$$

$$: d_3 = d(O ; (\Delta)) \text{ استنتاج المسافة}$$

نعلم أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان و (Δ) مستقيم تقاطعهما .

النقطة O لا تنتمي إلى (P_1) ولا تنتمي إلى (P_2) .

المسافة بين النقطة O والمستقيم (Δ) هي الطول OH حيث H هي المسقط

العمودي للنقطة O على المستقيم (Δ) .

لتكن O' المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (P_2) ، وبالتالي فإن المثلث

$OO'H$ قائم في O' ، وحسب مبرهنة فيثاغورث :

$$d_3^2 = OH^2 = d_1^2 + d_2^2 = \left(\frac{\sqrt{29}}{29}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{38}{261}$$

$$d_3 = d(O ; (\Delta)) = \sqrt{\frac{38}{261}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{38}{29}} \text{ : إذن}$$

التمرين الثالث :

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق :

$$\begin{cases} m = PPCM(u_3 ; u_5) \\ d = PGCD(u_3 ; u_5) \end{cases} \text{ حيث } \begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$$

(1) تعيين الحدّين u_3 و u_5 :

تذكير : a و b عدنان طبيعيان غير معدومين .

* إذا كان $PGCD(a ; b) = d$ فإنه يوجد عدنان طبيعيان a' و b' أوليان فيما

بينهما بحيث : $a = d \times a'$ و $b = d \times b'$.

* $PGCD(a ; b) \times PPCM(a ; b) = a \times b$ أي $m \times d = a \times b$

لدينا : $m \times d = a \times b$ ومنه : $m \times d = da' \times db'$ إذن : $m = da'b'$

بوضع $u_3 = a$ و $u_5 = b$ تكتب المساواة : $m + d = 42$ كما يلي :

$da'b' + d = 42$ ومنه : $d(a'b' + 1) = 42$ نستنتج أن : d يقسم 42 ... (1)

ولدينا : u_3 ، u_4 و u_5 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية حسابية

وحسب خاصية الوسط الحسابي لمتتالية حسابية فإن $u_3 + u_5 = 2u_4$ ومنه : $u_3 + u_5 = 30$ وبالتالي : $da' + db' = 30$
 ومنه : $d(a' + b') = 42$ ، نستنتج أن : d يقسم 30 ... (2)
 من (1) و (2) نستنتج أن : d يقسم $PGCD(30; 42)$ أي : d يقسم 6
 ومنه : $d \in \{1; 2; 3; 6\}$

$$\begin{cases} d(a'b' + 1) = 42 \\ d(a' + b') = 30 \end{cases} \text{ نسمي (E) الجملة الآتية :}$$

الحالة 1 : $d = 1$

$$\text{الجملة مستحيلة} \begin{cases} a'b' = 41 \\ a' + b' = 30 \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} a'b' + 1 = 42 \\ a' + b' = 30 \end{cases} \text{ تكافئ (E)}$$

الحالة 2 : $d = 2$

$$\text{الجملة مستحيلة} \begin{cases} a'b' = 20 \\ a' + b' = 15 \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} a'b' + 1 = 21 \\ a' + b' = 15 \end{cases} \text{ تكافئ (E)}$$

الحالة 3 : $d = 3$

$$\text{الجملة مستحيلة} \begin{cases} a'b' = 13 \\ a' + b' = 10 \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} a'b' + 1 = 14 \\ a' + b' = 10 \end{cases} \text{ تكافئ (E)}$$

الحالة 4 : $d = 6$

$$\begin{cases} a' = 2 \\ b' = 3 \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} a'b' = 6 \\ a' + b' = 5 \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} a'b' + 1 = 7 \\ a' + b' = 5 \end{cases} \text{ تكافئ (E)}$$

$$\begin{cases} u_3 = 12 \\ u_5 = 18 \end{cases} \text{ إذن : } \begin{cases} a = d \times a' = 6 \times 2 = 12 \\ b = d \times b' = 6 \times 3 = 18 \end{cases} \text{ وبالتالي :}$$

● استنتاج قيمة u_0 :

$$r = u_5 - u_4 = 18 - 15 = 3 \text{ هو } (u_n) \text{ أساس المتتالية}$$

$$\text{ولدينا : } u_3 = u_0 + 3r \text{ ومنه : } u_0 = u_3 - 3r = 12 - 3 \times 3 = 3$$

$$\text{إذن : } u_0 = 3$$

$$(2) \text{ كتابة } u_n \text{ بدلالة } n : u_n = u_0 + n \times r = 3 + 3n$$

● تبيان أن 2010 حدّ من حدود المتتالية (u_n) :

$$\text{من المساواة : } 2010 = 3 + 3n \text{ نجد : } n = 669 \text{ وهو عدد طبيعي .}$$

$$\text{نستنتج أن العدد 2010 هو حدّ من حدود المتتالية } (u_n) \text{ ورتبته 670 .}$$

3) تعيين الحدّ الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) هو 10080 :
نفرض أن الحدّ الذي نبحث عنه هو u_p ، وحسب المعطيات فإن

$$(*) \dots u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + u_{p+4} = 10080$$

$$\text{لكن : } u_{p+1} = u_p + r \text{ ، } u_{p+2} = u_p + 2r \text{ ، } u_{p+3} = u_p + 3r \text{ ، } u_{p+4} = u_p + 4r \text{ و}$$

$$\text{تكتب عندئذ المساواة (*) كما يلي : } 5u_p + 10r = 10080$$

$$\text{ومنه : } 2010 = \frac{10080 - 10r}{5} = \frac{10080 - 30}{5} = u_p \text{ . إذن : } u_p = 2010$$

4) أ- حساب المجموع S_n :

$$\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود} (\text{الحدّ الأول من المجموع} + \text{الحدّ الأخير منه})}{2}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2n} = \frac{2n+1}{2}(u_0 + u_{2n})$$

$$\text{ولدينا : } u_0 = 3 \text{ و } u_{2n} = u_0 + 2n \times r = 3 + 6n$$

$$\text{ومنه : } S_n = 3(n+1)(2n+1)$$

ب- استنتاج المجموعين S_1 و S_2 :

S_1 هو مجموع $n+1$ حدًا الأولى من متتالية حسابية حدّها الأول $u_0 = 3$ وأساسها $r' = 2r = 6$.

$$S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_{2n})$$

$$= \frac{n+1}{2}(3 + 3 + 6n) = 3(n+1)^2$$

S_2 هو مجموع n حدًا الأولى من متتالية حسابية حدّها الأول $u_1 = 6$ وأساسها

$$r' = 2r = 6$$

$$S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1} = \frac{n}{2}(u_1 + u_{2n-1})$$

$$= \frac{n}{2}(6 + 6 + 6(n-1)) = 3n(n+1)$$

ملاحظة : يمكن حساب S_1 وبملاحظة أن $S_1 + S_2 = S_n$ نستنتج S_2 .

التمرين الرابع :

1) أ- حساب f' ، f'' :

تذكير : $(uv)' = u'v + v'u$

$$f'(x) = (3x + 4)' e^x + (e^x)' (3x + 4) = (3x + 7) e^x$$

$$f''(x) = (3x + 7)' e^x + (e^x)' (3x + 7) = (3x + 10) e^x$$

• البرهان أنه من أجل كل n من \mathbb{N}^* فإن $f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4) e^x$

نسمي الخاصية p_n " $f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4) e^x$ "

• التحقق من صحة p_1 :

$$f^{(1)}(x) = f'(x) \text{ الطرف الأول يساوي}$$

$$(3x + 3 \times 1 + 4) e^x = (3x + 7) e^x \text{ الطرف الثاني يساوي}$$

ومنه : الطرف الأول يساوي الطرف الثاني

إذن : p_1 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4) e^x$

ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $f^{(n+1)}(x) = (3x + 3(n+1) + 4) e^x$

$$f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]' = [(3x + 3n + 4) e^x]' \quad \text{لدينا :}$$

$$= (3x + 3n + 4)' e^x + (e^x)' (3x + 3n + 4)$$

$$= \dots = (3x + 3(n+1) + 4) e^x$$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل n من \mathbb{N}^* فإن $f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4) e^x$

ب- استنتاج حل المعادلة التفاضلية $y'' = (3x + 16) e^x$:

$$y'' = (3x + 16) e^x \quad \text{لدينا :}$$

ومنه $y' = (3x + 16 - 3) e^x + c = (3x + 13) e^x + c$ (c ثابت حقيقي)

وبالتالي : $y = (3x + 13 - 3)e^x + cx + c' = (3x + 10)e^x + cx + c'$ حيث c و c' ثابتان حقيقيان .

إذن : حلول المعادلة التفاضلية $y'' = (3x + 16)e^x$ هي الدوال y حيث :

$$y = (3x + 10)e^x + cx + c' \quad (c \text{ و } c' \text{ ثابتان حقيقيان})$$

(2) أ- تبيان أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

لدينا : $f(x) = (3x + 4)e^x = 3xe^x + 4e^x$

ونعلم أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ **ومنه :** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

التفسير الهندسي للنتيجة : محور الفواصل مستقيم مقارب للمنحني (c_f) بجوار $-\infty$
ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

من السؤال 1- أ- وجدنا أن $f'(x) = (3x + 7)e^x$ وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $(3x + 7)$ ومنه النتائج التالية :

x	$-\infty$	$-\frac{7}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

$$x = -\frac{7}{3} \text{ يكافئ } f'(x) = 0$$

$$x < -\frac{7}{3} \text{ يكافئ } f'(x) < 0$$

$$x > -\frac{7}{3} \text{ يكافئ } f'(x) > 0$$

إذن : الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty ; -\frac{7}{3}]$ و متزايدة تماما على

x	$-\infty$	$-\frac{7}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-3e^{-\frac{7}{3}}$	$+\infty$

المجال $[-\frac{7}{3} ; +\infty[$.

• جدول تغيرات الدالة f :

$$f\left(-\frac{7}{3}\right) = -3e^{-\frac{7}{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(3) أ- كتابة معادلة للمماس (Δ) للمنحني (c_f) في النقطة ω التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$:

تذكير : معادلة مماس المنحني الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي :

$$y = f'(a).(x - a) + f(a)$$

و عليه فإن معادلة المماس (Δ) هي :

$$y = -3e^{-\frac{10}{3}} \left(x + \frac{10}{3} \right) - 6e^{-\frac{10}{3}} = -3e^{-\frac{10}{3}} x - 16e^{-\frac{10}{3}}$$

ب- تبيان أن ω هي نقطة انعطاف للمنحني (c_f) :

تذكير : دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I ، x_0 عدد حقيقي من I .
إذا انعدمت الدالة المشتقة f'' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$ هي نقطة انعطاف للمنحني الممثل للدالة f .

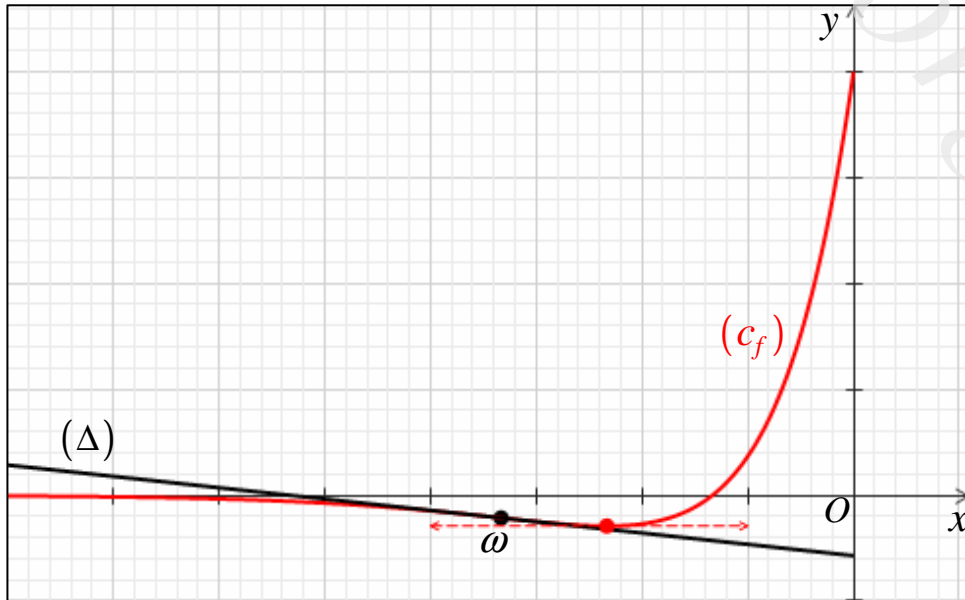
الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على \mathbb{R} و $f''(x) = (3x + 10)e^x$

$$f''(x) = 0 \text{ يكافئ } 3x + 10 = 0 \text{ ومنه } x = -\frac{10}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{10}{3}$	$+\infty$	$x > -\frac{10}{3}$ يكافئ $f''(x) > 0$
$f''(x)$	-	0	+	$x < -\frac{10}{3}$ يكافئ $f''(x) < 0$

الدالة f'' تنعدم عند $x_0 = -\frac{10}{3}$ مغيرة إشارتها وبالتالي فإن النقطة ω هي نقطة انعطاف للمنحني (c_f) .

ج- رسم (Δ) و (c_f) على المجال $]-\infty; 0]$:



$$(4) \text{ أ- حساب } \int_{-1}^x t e^t dt :$$

تذكير بطريقة المكاملة بالتجزئة : لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين لهما u' و v' مستمرتان على I .
من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I ، لدينا :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

$$\text{نضع : } \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^t \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = e^t \end{cases}$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x t e^t dx &= \left[t e^t \right]_{-1}^x - \int_{-1}^x e^t dx \\ &= \left[(t-1) e^t \right]_{-1}^x = (x-1) e^x + \frac{2}{e} \end{aligned}$$

• استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0]$:

لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0]$

لدينا : $f(x) = (3x+4)e^x = 3xe^x + 4e^x$

ومنه : $F(x) = 3(x-1)e^x + 4e^x + k = (3x+1)e^x + k$

إذن : $F(x) = (3x+1)e^x + k$ حيث k ثابت حقيقي .

ب- حساب $A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= -\int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} f(x) dx = -\int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} (3x+4)e^x dx = \\ &= -\left[(3x+1)e^x \right]_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} = (3\lambda+1)e^{\lambda} + 3e^{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

إذن : $A(\lambda) = (3\lambda+1)e^{\lambda} + 3e^{-\frac{4}{3}}$

• حساب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$:

$$A(\lambda) = (3\lambda + 1)e^\lambda + 3e^{-\frac{4}{3}} = 3\lambda e^\lambda + e^\lambda + 3e^{-\frac{4}{3}} : \text{ لدينا}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} 3\lambda e^\lambda = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e^\lambda = 0 : \text{ ونعلم أن}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = 3e^{-\frac{4}{3}} : \text{ ومنه}$$

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

(1) حل المعادلة (E) :

طريقة أولى : (استعمال مبرهنة غوص)

• تعيين حل خاص للمعادلة (E) :

التنايية (E) حل خاص للمعادلة (E) $(x_0 ; y_0) = (1; 2)$

• حل المعادلة (E) :

$$\text{لدينا : } \begin{cases} 13x - 7y = -1 \\ 13x_0 - 7y_0 = -1 \end{cases} \text{ ومنه : } 13(x - x_0) - 7(y - y_0) = 0$$

وبالتالي : $13(x - x_0) = 7(y - y_0) \dots (*)$

من المساواة (*) نستنتج أن 7 يقسم الجداء $13(x - x_0)$

وبما أن 7 و 13 أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص فإن 7 يقسم $x - x_0$

ومنه : $x - x_0 = 7k$ وبالتالي : $x = 7k + 1$ وبالتعويض في المعادلة (E)

نجد : $y = 13k + 2$

إذن : حلول المعادلة (E) هي التنايات $(x; y)$ حيث : $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} x = 7k + 1 \\ y = 13k + 2 \end{cases}$

طريقة ثانية : (استعمال طريقة الموافقة)

نكتب المعادلة (E) باستعمال الموافقة بترديد 7 كما يلي : $13x \equiv -1 [7]$

ونعلم أن : $13 \equiv -1 [7]$ وبالتالي : $-x \equiv -1 [7]$ ومنه : $x \equiv 1 [7]$

وعليه : $x = 7k + 1$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $y = 13k + 2$

(2) تعيين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث $\begin{cases} a \equiv -1 [7] \\ a \equiv 0 [13] \end{cases}$

لدينا : $\begin{cases} a \equiv -1 [7] \\ a \equiv 0 [13] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a = 7\lambda - 1 \\ a = 13\lambda' \end{cases}$ حيث λ و λ' عدنان صحيحان

وبالتالي : $7\lambda - 1 = 13\lambda'$ أي : $13\lambda' - 7\lambda = -1$

وحسب السؤال السابق نستنتج أن : $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} \lambda' = x = 7k + 1 \\ \lambda = y = 13k + 2 \end{cases}$

وبالتعويض في $a = 7\lambda - 1$ أو في $a = 13\lambda'$ نجد : $a = 91k + 13$
 إذن : $a = 91k + 13$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(3) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 7 :

$$9^0 \equiv 1 [7] , 9^1 \equiv 2 [7] , 9^2 \equiv 4 [7] , 9^3 \equiv 1 [7]$$

$$9^{3k} \equiv 1 [7] , 9^{3k+1} \equiv 2 [7] , 9^{3k+2} \equiv 4 [7]$$

نستنتج أن :
 إذن : بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 7 دورية ودورها 3 نلخصها في الجدول الآتي : (في هذا الجدول يدلّ k على عدد طبيعي)

$3k + 2$	$3k + 1$	$3k$	n
4	2	1	البواقي

• دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 :

$$9^0 \equiv 1 [13] , 9^1 \equiv 9 [13] , 9^2 \equiv 3 [13] , 9^3 \equiv 1 [13]$$

$$9^{3k'} \equiv 1 [13] , 9^{3k'+1} \equiv 9 [13] , 9^{3k'+2} \equiv 3 [13]$$

نستنتج أن :
 إذن : بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 دورية ودورها 3 نلخصها في الجدول الآتي : (في هذا الجدول يدلّ k' على عدد طبيعي)

$3k' + 2$	$3k' + 1$	$3k'$	n
3	9	1	البواقي

(4) تعيين α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91 :

بما أن $b = \overline{\alpha 00\beta 086}^9$ و $1 \leq \alpha \leq 8$ و $0 \leq \beta \leq 8$

$$b = \overline{\alpha 00\beta 086}^9 = 6 + 8 \times 9 + 0 \times 9^2 + \beta \times 9^3 + 0 \times 9^4 + 0 \times 9^5 + \alpha \times 9^6$$

$$= 6 + 8 \times 9 + \beta \times 9^3 + \alpha \times 9^6$$

$$\begin{cases} b \equiv 0 [7] \\ b \equiv 0 [13] \end{cases} \text{ لدينا : } b \equiv 0 [91] \text{ أي : } b \equiv 0 [7 \times 13] \text{ ومنه :}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta \equiv -1 [7] \\ \alpha + \beta \equiv 0 [13] \end{cases} \text{ وباستعمال نتائج السؤال (3) نحصل على الجملة :}$$

$$\text{ومنّه : } (\alpha; \beta) \in \{ (5; 8), (6; 7), (7; 6), (8; 5) \}$$

ملاحظة : لتعيين α و β ، يمكن الاستعانة بالجدول الآتي :

$\alpha \backslash \beta$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	9	10	11	12	13	14	15	16

التمرين الثاني :

(1) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) :

تكون $M(x; y; z)$ نقطة من (D) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث :

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t \\ z = \frac{3}{2}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ومنه التمثيل الوسيطي الآتي : $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{u}$

• كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

تكون $M(x; y; z)$ نقطة من (Δ) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t' بحيث :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t' \\ y = t' \\ z = -3t' + 3 \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

ومنه التمثيل الوسيطي الآتي : $\overrightarrow{CM} = t' \overrightarrow{v}$

• دراسة الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (Δ) :

لدينا : $\overrightarrow{u} \left(-1; 1; \frac{3}{2} \right)$ و $\overrightarrow{v} \left(\frac{1}{2}; 1; -3 \right)$ وبالتالي فإن الشعاعين \overrightarrow{u} و \overrightarrow{v} غير مرتبطين خطياً ، وعليه فإن المستقيمين (D) و (Δ) إما من نفس المستوي

ومتقاطعان وإما ليسا من نفس المستوي .
 للبحث عن نقط تقاطع (D) و (Δ) نقوم بحل الجملة :

$$\begin{cases} -t + 1 = \frac{1}{2}t' \\ t = t' \\ \frac{3}{2}t = -3t' + 3 \end{cases}$$

بحل الجملة :

$$\begin{cases} -t + 1 = \frac{1}{2}t' \\ t = t' \\ \frac{3}{2}t = -3t' + 3 \end{cases}$$

نجد : $t = t' = \frac{2}{3}$ ومنه : $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 1 \end{cases}$

إن : $(D) \cap (\Delta) = \left\{ G \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1 \right) \right\}$

(2) تبيان أن $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$
 لدينا : $\vec{GA} \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -1 \right)$ ، $\vec{GB} \left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -1 \right)$ و $\vec{GC} \left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 2 \right)$

فإن $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ وبما أن :

$$\begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \\ -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = 0 \\ -1 - 1 + 2 = 0 \end{cases}$$

● الاستنتاج : نستنتج أن النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC .
 (3) تعيين شعاع ناظمي \vec{n} للمستوي (ABC) وكتابة معادلة ديكراتية له :

لدينا : $\vec{AB}(-1; 2; 0)$ و $\vec{AC}(-1; 0; 3)$

واضح أن الشعاعين \vec{AB} و \vec{AC} غير مرتبطين خطيا لأن مثلا : $\frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{3}$

وبالتالي فإن النقط A ، B و C ليست في استقامية ، فهي تعين مستويا (ABC) .

إذا كان $\vec{n}(a; b; c)$ شعاعا ناظما للمستوي (ABC) فإن :

$$\begin{cases} \vec{AB} \perp \vec{n} \\ \vec{AC} \perp \vec{n} \end{cases}$$

ومنه : $\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{AC} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} -a + 2b = 0 \\ -a + 3c = 0 \end{cases}$ وبحل هذه الجملة مع

فرض $a = 6$ نجد : $\vec{n}(6; 3; 2)$.

تكون عندئذ معادلة للمستوي (ABC) من الشكل $6x + 3y + 2z + d = 0$

ولدينا : $A \in (ABC)$ ومنه : $6 \times 1 + 3 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0$ ينتج : $d = -6$
إذن : معادلة للمستوي (ABC) هي $6x + 3y + 2z - 6 = 0$

4 حساب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) :
تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0; y_0; z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax + by + cz + d = 0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A; (P))$ حيث :

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

وباستعمال المساواة المؤطرة نجد :

$$d(O; (ABC)) = \frac{|0 + 0 + 0 - 6|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$$

5 أ- إيجاد إحداثيات النقطة H :

نفرض أن إحداثيات النقطة H هي $(x; y; z)$

بما أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D) فإن

$$\begin{cases} -x + (y - 2) + \frac{3}{2}z = 0 \\ x = -t + 1 \\ y = t \\ z = \frac{3}{2}t \end{cases} \quad \text{وبحل الجملة} \quad \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{BH} = 0 \\ H \in (D) \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{BH} \\ H \in (D) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t \\ z = \frac{3}{2}t \end{cases} \quad \text{نجد : } t = \frac{12}{17} \quad \text{وبالتعويض في الجملة :}$$

$$H \left(\frac{5}{17}; \frac{12}{17}; \frac{18}{17} \right) \quad \text{نجد :}$$

ب- استنتاج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D) :

تذكير : $A(x_A; y_A; z_A)$ و $B(x_B; y_B; z_B)$ نقطتان من الفضاء .

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

المسافة بين النقطة B والمستقيم (D) هي BH .

لدينا: $B(0; 2; 0)$ و $H\left(\frac{5}{17}; \frac{12}{17}; \frac{18}{17}\right)$ ومنه: $BH = \sqrt{\frac{833}{289}} = \frac{7}{17}\sqrt{17}$

التمرين الثالث :

(1) أ- خطأ

لدينا: $|a| = \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = 1$ و $\arg(a) = \frac{3\pi}{4}$

وبالتالي فإن الشكل المثلثي للعدد المركب a هو $\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$

ب- صحيح

تذكير بدستور موافر: θ عدد حقيقي كفي و n عدد صحيح.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$a^{2011} = \cos\frac{3 \times 2011\pi}{4} + i\sin\frac{3 \times 2011\pi}{4} \quad \text{لدينا:}$$

$$= \cos\left(1508\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(1508\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bar{a} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ومنه: } a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a^{2011} + \bar{a} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \quad \text{وبالتالي:}$$

(2) أ- خطأ

العبارة المركبة للتحويل T من الشكل $z' = az$ حيث: $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومن السؤال 1- أ- وجدنا أن: $|a| = \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = 1$ و $\arg(a) = \frac{3\pi}{4}$

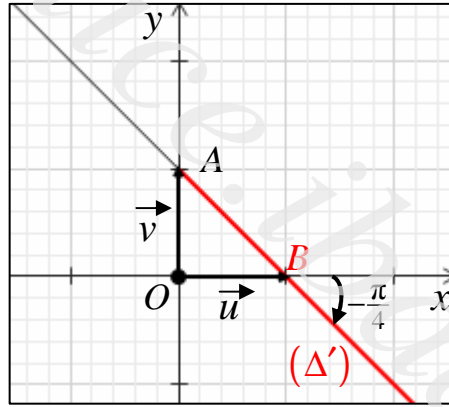
نستنتج أن التحويل T دوران زاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم.

ب- خطأ

تذكير : $\arg(z - i) = \arg(z_M - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) [2\pi]$

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ معناه } \arg(z - i) = -\frac{\pi}{4}$$

إذن : مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z - i) = -\frac{\pi}{4}$ هي نصف المستقيم (AB) الذي يشمل النقطة B ذات اللاحقة 1 وشعاع توجيهه \vec{w}' لاحقه $1 - i$. (مجموعة النقط M هي نصف مستقيم مفتوح مبدؤه A)



(3) أ- صحيح

نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$$

نسمي الخاصية " p_n من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$ "

• التحقق من صحة p_0 :

$$u_0 = \frac{1}{12} \text{ الطرف الأول يساوي}$$

$$-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \frac{2}{3} = -\frac{7}{12} + \frac{2}{3} = \frac{1}{12} \text{ الطرف الثاني يساوي}$$

ومنه : الطرف الأول يساوي الطرف الثاني وبالتالي فإن p_0 صحيحة

$$u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3} \text{ : نفرض أن } p_n \text{ صحيحة أي :}$$

$$u_{n+1} = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + \frac{2}{3} \text{ : ونبرهن صحة } p_{n+1} \text{ أي :}$$

لدينا : $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{6}$ ومنه : $u_{n+1} = \frac{3}{4}\left[-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3}\right] + \frac{1}{6}$

وبالتالي : $u_{n+1} = -\frac{7}{12} \times \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = -\frac{7}{12} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + \frac{2}{3}$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$

ب- خطأ

من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + \frac{2}{3} + \frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n \left[\frac{3}{4} - 1\right] = \frac{7}{48}\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{aligned}$$

وبما أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{7}{48}\left(\frac{3}{4}\right)^n > 0$ ، فإن $u_{n+1} - u_n > 0$

وبالتالي : (u_n) متزايدة تماماً على \mathbb{N} .

ج- خطأ

تذكير : إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ وبالتالي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

لدينا : $u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$ ونعلم أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

وبالتالي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}$ وعليه فإن المتتالية (u_n) متقاربة .

التمرين الرابع :

(1) أ- دراسة اتجاه تغير الدالة g :

من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ ، $g'(x) = \frac{2(x^2+1)}{x} > 0$

وبالتالي فإن الدالة g متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.

• جدول تغيرات الدالة g :

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^2 = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x^2 = -\infty$ ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ب- احسب $g(1) = 0$:

• استنتاج إشارة $g(x)$ في المجال $]0; +\infty[$:

• $g(x) = 0$ يكافئ $x = 1$

• $g(x) < 0$ يكافئ $x \in]0; 1[$

• $g(x) > 0$ يكافئ $x \in]1; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(2) أ- تبيان أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$:

الدالة $x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$ معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* (دالة ناطقة) وبالتالي

فهي قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، الدالة $x \mapsto \ln x$ معرفة وقابلة للاشتقاق

على $]0; +\infty[$ (دالة لوغاريتمية نيبيرية)

نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$.

• تبيان أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$:

تذكير : $(uv)' = u'v + v'u$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)' \times \ln x + (\ln x)' \times \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\
 &= \frac{2}{x^3} \times \ln x + \frac{1}{x} \times \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\
 &= \frac{2 \ln x}{x^3} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = \frac{2 \ln x + x^2 - 1}{x^3}
 \end{aligned}$$

ونعلم أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ ، $\ln x^2 = 2 \ln x$ ،

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3} \text{ ، }]0; +\infty[\text{ من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من}$$

• استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ ومنه النتائج الآتية :

$$x = 1 \text{ يكافئ } f'(x) = 0 \text{ •}$$

$$x \in]0; 1[\text{ يكافئ } f'(x) < 0 \text{ •}$$

$$x \in]1; +\infty[\text{ يكافئ } f'(x) > 0 \text{ •}$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0; 1[$ و متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$

• جدول تغيّرات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty \text{ لدينا •}$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln x = \ln x - \frac{\ln x}{x^2} \text{ • ولدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ ونعلم أن :}$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

$$f(1) = 0$$

ب- دراسة وضعية (c_f) بالنسبة إلى (δ) :
طريقة: لدراسة وضعية المنحني (c_f) بالنسبة إلى المنحني (δ) نقوم بحساب الفرق $f(x) - \ln x$ وندرس إشارته.

$$\text{لدينا : } f(x) - \ln x = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln x - \ln x = -\frac{\ln x}{x^2}$$

إشارة الفرق $f(x) - \ln x$ من نفس إشارة $-\ln x$ ومنه النتائج الآتية :

- $f(x) - \ln x = 0$ يكافئ $x = 1$
- $f(x) - \ln x > 0$ يكافئ $x \in]0; 1[$
- $f(x) - \ln x < 0$ يكافئ $x \in]1; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - \ln x$	+	0	-

- إذا كان $x = 1$ فإن المنحنيين (c_f) و (δ) يتقاطعان في النقطة $H(1; 0)$.
- إذا كان $x \in]0; 1[$ فإن (c_f) يقع فوق (δ).
- إذا كان $x \in]1; +\infty[$ فإن (c_f) يقع تحت (δ).

• إيجاد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \ln x$

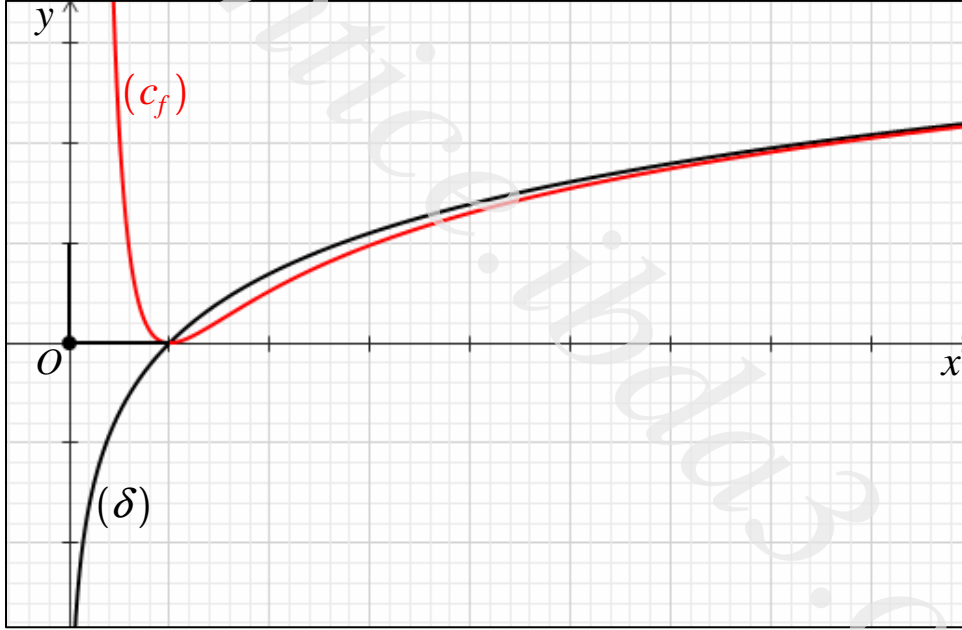
نعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (نتائج التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto x$ و $x \mapsto \ln x$)

ونعلم أيضا أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} = 0 \times 0 = 0$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \ln x = 0$

• الاستنتاج :

من السؤال 2-ب- وجدنا أن : $f(x) - \ln x = -\frac{\ln x}{x^2}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ نستنتج أن المنحني (c_f) مقارب للمنحني (δ) في جوار $+\infty$.
 • ارسم (δ) و (c_f) :



(3) أ- حساب $\int_1^x \frac{1}{t^2} \ln t dt$

تذكير بطريقة المكاملة بالتجزئة : لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين لهما u' و v' مستمرتان على I .
 من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I ، لدينا :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = -\frac{1}{t} \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \end{cases} \text{ نضع :}$$

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{t^2} dt$$

وبالتالي :

$$= \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^x - \left[\frac{1}{t} \right]_1^x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

$$\text{إذن : } \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

• التحقق أن دالة $x \mapsto x \ln x - x$ أصلية للدالة $\ln x$ على $x \in [1 ; +\infty[$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1 ; +\infty[$ ، لدينا :

$$\begin{aligned} (x \ln x - x)' &= (x \ln x)' - (x)' \\ &= (x)' \times \ln x + (\ln x)' \times x - 1 \\ &= \ln x + \frac{1}{x} \times x - 1 = \ln x \end{aligned}$$

إذن : $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $\ln x$ على $x \in [1 ; +\infty[$.

• استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $[1 ; +\infty[$:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln x = \ln x - \frac{1}{x^2} \ln x$$

$$F(x) = x \ln x - x + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} - 1$$

ب- حساب $A(\alpha)$:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \int_1^\alpha [\ln x - f(x)] dx = \int_1^\alpha \frac{1}{x^2} \ln x dx \\ &= -\frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1 \end{aligned}$$

$$A(\alpha) = -\frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1 \quad u.a \quad \text{إذن :}$$

• حساب $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha) = 1 \quad \text{ومنه :} \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\ln \alpha}{\alpha} = 0$$