حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1) كتابة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي :

لدينا : $z_A = 1-i$ ومنه : $|z_A| = |1-i| = \sqrt{2}$

وبالتالي : $z_A = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ولدينا : $z_B = -1+i$ ومنه : ومنه : $|z_B| = |-1+i| = \sqrt{2}$

ومنه : $z_B = -1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

(لاحظ أن : $z_B = -1+i = -(1-i) = -z_A$)

ولدينا : $z_C = \sqrt{3}(1+i)$ ومنه : $|z_C| = \left|\sqrt{3}(1+i)\right| = \sqrt{3}\times\sqrt{2} = \sqrt{6}$

ومنه : $z_C = \sqrt{3}(1+i) = \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) أ- حساب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$:

لدينا :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1+i\ -1+i}{\sqrt{3+i\sqrt{3}-1+i}} = \frac{-2+2i}{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

$$= \frac{-2+2i}{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)} \times \frac{\sqrt{3}-1-i\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}-1-i\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

ومنه : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{4+4i\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

وبالتالي :

$$\begin{cases} \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

● التفسير الهندسي للنتائج المحصل عليها :

نعلم أن : $\frac{AB}{AC}=\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|$ و $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB})$

وبالتالي : $\frac{AB}{AC}=1$ أي : $AB=AC$ و $(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB})\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

ب- تحديد طبيعة المثلث ABC :

من $AB=AC$ و $[2\pi]$ $(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB})\equiv\frac{\pi}{3}$ نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

3) تعيين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معيّنا :

نعلم أن المثلث ABC متقايس الأضلاع ، لكي يكون الرباعي $ACBD$ معيّنا يكفي أن يكون القطران $[AB]$ و $[CD]$ متناصفان في النقطة O

وهذا يعني أن النقطة D هي نظيرة النقطة C بالنسبة إلى O

ومنه : $z_D=-z_C=-\sqrt{3}(1+i)$

4) أ- تعيين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة :

لدينا : $z'=(-1+i)z+1-3i$ وبالتالي فإن العبارة المركبة للتحويل T من الشكل $z'=az+b$ مع $a=-1+i$ و $b=1-3i$ وبما أن : $|a|=\sqrt{2}$ نستنتج أن T هو تشابه مباشر : نسبته $k=|a|=\sqrt{2}$ ، زاويته $\theta=\arg(a)=\frac{3\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة z_Ω حيث :

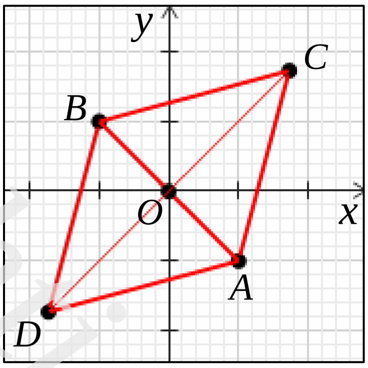
$z_\Omega=\frac{b}{1-a}$ ومنه : $z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{1-3i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}=1-i=z_A$

أي أن مركز التشابه T هو النقطة A .

ب- استنتاج طبيعة التحويل $T\circ T$ وعناصره المميزة :

تذكير : إذا كان $S(\Omega;k;\theta)$ و $S'(\Omega;k';\theta')$ تشابهين غير مباشرين فإن المركب $S\circ S'$ هو تشابه غير مباشر حيث : $S\circ S'=S''(\Omega;kk';\theta+\theta')$

وعليه فإن $T\circ T$ هو تشابه غير مباشر مركزه النقطة A ، نسبته $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$.



التمرين الثاني :

1) أ- إثبات أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا :

تذكير : ● A ، B و C تعيّن مستويا معناه : A ، B و C ليست في استقامية .

● A ، B و C ليست في استقامية معناه : الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا .

● $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا معناه : لا يوجد عدد حقيقي t حيث : $\overrightarrow{AC} = t\,\overrightarrow{AB}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(0\,;\,1\,;\,2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\,;\,1\,;\,-1)$

واضح أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن مثلا : $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{-2}$

ب- تبيان أن $\overrightarrow{n}(3\,;4\,;-2)$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$:

لدينا : $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 3\times0+4\times1-2\times2 = 4-4 = 0$ ومنه : $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB}$

و لدينا : $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 3\times(-2)+4\times1-2\times(-1) = 0$ ومنه : $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AC}$

● استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

$\overrightarrow{n}(3\,;4\,;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) وبالتالي فإن معادلته من الشكل : $3x+4y-2z+d=0$ ، وبما أن $A \in (ABC)$ فإن :

$3\times1+4\times0-2\times2+d=0$ ومنه : $d=1$

إذن : معادلة للمستوي (ABC) هي $3x+4y-2z+1=0$

2) أ- تبيان أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان :

$\overrightarrow{n_1}(3\,;\,4\,;\,-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_1)

$\overrightarrow{n_2}(2\,;-2\,;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2)

لدينا : $\overrightarrow{n_1}\,.\,\overrightarrow{n_2} = 3\times2+4\times(-2)-2\times(-1) = 0$ ومنه : $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$

إذن : المستويان (P_1) و (P_2) متعامدان .

ب- تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) :

لدينا : $\begin{cases} 3x+4y-2z+1=0 \\ 2x-2y-z-1=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} z=2x-2y-1 \\ 3x+4y-2z+1=0 \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} z=2x-2y-1 \\ 3x+4y-2(2x-2y-1)+1=0 \end{cases}$

وبعد التبسيط نحصل على الجملة : $\begin{cases} z=2x-2y-1 \\ -x+8y+3=0 \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} x=8y+3 \\ z=2(8y+3)-2y-1=14y+7 \end{cases}$

وبوضع $y=t$ نحصل على الجملة : $\begin{cases} x=8t+3 \\ y=t \\ z=14t+5 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

تمثل هذه الجملة الأخيرة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) . (توجد ثلاثيات أخرى)

جـ- التحقق أن النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى (Δ) :

من الجملة : $\begin{cases} 0=8t+3 \\ 0=t \\ 0=14t+5 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} t=-\frac{3}{8} \\ t=0 \\ t=-\frac{5}{14} \end{cases}$ و هذا مستحيل

نستنتج أن النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى (Δ) .

د- حساب المسافتين $d(O;(P_1))$ و $d(O;(P_2))$:

تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث :

$$\boxed{d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

وباستعمال المساواة المؤطرة نجد :

$$d_1 = d\left(O\,;(P_1)\right) = \frac{|0+0+0+1|}{\sqrt{9+16+4}} = \frac{1}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{29}$$

$$d_2 = d\left(O\,;(P_2)\right) = \frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3}$$

- استنتاج المسافة $d_3 = d\left(O\,;(\Delta)\right)$:

نعلم أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان و (Δ) مستقيم تقاطعهما .

النقطة O لا تنتمي إلى (P_1) ولا تنتمي إلى (P_2) .

المسافة بين النقطة O والمستقيم (Δ) هي الطول OH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (Δ) .

لتكن O' المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (P_2) ، وبالتالي فإن المثلث $OO'H$ قائم في O' ، وحسب مبرهنة فيثاغورث :

$$d_3^{\;2} = OH^2 = d_1^{\;2} + d_2^{\;2} = \left(\frac{\sqrt{29}}{29}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{38}{261}$$

إذن : $d_3 = d\left(O\,;(\Delta)\right) = \sqrt{\frac{38}{261}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{38}{29}}$

التمرين الثالث :

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق :

$$\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases} \quad \text{حيث :} \quad \begin{cases} m = PPCM\,(u_3\,;u_5) \\ d = PGCD\,(u_3\,;u_5) \end{cases}$$

1) تعيين الحدّين u_3 و u_5 :

تذكير : a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

* إذا كان $PGCD\,(a\,;b) = d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما بحيث : $a = d\times a'$ و $b = d\times b'$.

* $PGCD\,(a\,;b)\times PPCM\,(a\,;b) = a\times b$ أي $m\times d = a\times b$

لدينا : $m\times d = a\times b$ ومنه : $m\times d = da'\times db'$ إذن : $m = da'b'$

بوضع $u_3 = a$ و $u_5 = b$ تكتب المساواة : $m + d = 42$ كما يلي :

$da'b' + d = 42$ ومنه : $d\,(a'b'+1) = 42$ نستنتج أن : d يقسم 42 ... (1)

ولدينا : u_3 ، u_4 و u_5 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية حسابية

وحسب خاصية الوسط الحسابي لمتتالية حسابية فإن $u_3+u_5=2u_4$

ومنه : $u_3+u_5=30$ وبالتالي : $da'+db'=30$

ومنه : $d(a'+b')=42$ ، نستنتج أن : d يقسم 30 ... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : d يقسم $PGCD(30;42)$ أي : d يقسم 6

ومنه : $d\in\{1;2;3;6\}$

نسمي (E) الجملة الآتية : $\begin{cases} d(a'b'+1)=42 \\ d(a'+b')=30 \end{cases}$

الحالة 1 : $d=1$

(E) تكافئ $\begin{cases} a'b'+1=42 \\ a'+b'=30 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a'b'=41 \\ a'+b'=30 \end{cases}$ الجملة مستحيلة

الحالة 2 : $d=2$

(E) تكافئ $\begin{cases} a'b'+1=21 \\ a'+b'=15 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a'b'=20 \\ a'+b'=15 \end{cases}$ الجملة مستحيلة

الحالة 3 : $d=3$

(E) تكافئ $\begin{cases} a'b'+1=14 \\ a'+b'=10 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a'b'=13 \\ a'+b'=10 \end{cases}$ الجملة مستحيلة

الحالة 4 : $d=6$

(E) تكافئ $\begin{cases} a'b'+1=7 \\ a'+b'=5 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a'b'=6 \\ a'+b'=5 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a'=2 \\ b'=3 \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} a=d\times a'=6\times2=12 \\ b=d\times b'=6\times3=18 \end{cases}$. إذن : $\begin{cases} u_3=12 \\ u_5=18 \end{cases}$

- استنتاج قيمة u_0 :

أساس المتتالية (u_n) هو $r=u_5-u_4=18-15=3$

ولدينا : $u_3=u_0+3r$ ومنه : $u_0=u_3-3r=12-3\times3=3$

إذن : $u_0=3$

2) كتابة u_n بدلالة n : $u_n=u_0+n\times r=3+3n$

- تبيان أن 2010 حدّ من حدود المتتالية (u_n) :

من المساواة : $2010=3+3n$ نجد : $n=669$ وهو عدد طبيعي .

نستنتج أن العدد 2010 هو حدّ من حدود المتتالية (u_n) ورتبته 670 .

3) تعيين الحدّ الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) هو 10080 :

نفرض أن الحدّ الذي نبحث عنه هو u_p ، وحسب المعطيات فإن

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + u_{p+4} = 10080 \quad \dots (*)$$

لكن : $u_{p+1} = u_p + r$ ، $u_{p+2} = u_p + 2r$ ، $u_{p+3} = u_p + 3r$

و $u_{p+4} = u_p + 4r$

تكتب عندئذ المساواة $(*)$ كما يلي : $5u_p + 10r = 10080$

ومنه : $u_p = \dfrac{10080 - 10r}{5} = \dfrac{10080 - 30}{5} = 2010$. إذن : $u_p = 2010$

4) أ- حساب المجموع S_n :

$$\boxed{\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left(\text{الحدّ الأول من المجموع} + \text{الحدّ الأخير منه}\right)}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n} = \frac{2n+1}{2}(u_0 + u_{2n})$$

ولدينا : $u_0 = 3$ و $u_{2n} = u_0 + 2n \times r = 3 + 6n$

ومنه : $S_n = 3(n+1)(2n+1)$

ب- استنتاج المجموعين S_1 و S_2 :

S_1 هو مجموع $n+1$ حدّا الأولى من متتالية حسابية حدّها الأول $u_0 = 3$ وأساسها $r' = 2r = 6$.

$$S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_{2n})$$

$$= \frac{n+1}{2}(3 + 3 + 6n) = 3(n+1)^2$$

S_2 هو مجموع n حدّا الأولى من متتالية حسابية حدّها الأول $u_1 = 6$ وأساسها $r' = 2r = 6$

$$S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1} = \frac{n}{2}(u_1 + u_{2n-1})$$

$$= \frac{n}{2}(6 + 6 + 6(n-1)) = 3n(n+1)$$

ملاحظة : يمكن حساب S_1 وبملاحظة أن $S_1 + S_2 = S_n$ نستنتج S_2 .

التمرين الرابع :

1) أ- حساب f' ، f'' :

تذكير : $(uv)' = u'v + v'u$

$$f'(x) = (3x+4)' e^x + (e^x)'(3x+4) = (3x+7)e^x$$

$$f''(x) = (3x+7)' e^x + (e^x)'(3x+7) = (3x+10)e^x$$

● البرهان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ فإن $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$:

نسمي p_n الخاصية " $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$ "

● التحقق من صحة p_1 :

الطرف الأول يساوي $f^{(1)}(x) = f'(x)$

الطرف الثاني يساوي $(3x+3\times1+4)e^x = (3x+7)e^x$

ومنه : الطرف الأول يساوي الطرف الثاني

إذن : p_1 صحيحة

● نفرض أن p_n صحيحة أي : $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$

ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $f^{(n+1)}(x) = (3x+3(n+1)+4)e^x$

لدينا : $f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' = \left[(3x+3n+4)e^x\right]'$

$$= (3x+3n+4)' e^x + (e^x)'(3x+3n+4)$$

$$= \cdots = (3x+3(n+1)+4)e^x$$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

● إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ فإن $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$.

ب- استنتاج حل المعادلة التفاضلية $y'' = (3x+16)e^x$:

لدينا : $y'' = (3x+16)e^x$

ومنه $y' = (3x+16-3)e^x + c = (3x+13)e^x + c$ (c ثابت حقيقي)

وبالتالي : $y=(3x+13-3)e^{x}+cx+c'=(3x+10)e^{x}+cx+c'$

حيث c و c' ثابتان حقيقيان .

إذن : حلول المعادلة التفاضلية $y''=(3x+16)e^{x}$ هي الدوال y حيث :

$y=(3x+10)e^{x}+cx+c'$ (c و c' ثابتان حقيقيان)

2) أ- تبيان أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$:

لدينا : $f(x)=(3x+4)e^{x}=3xe^{x}+4e^{x}$

ونعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

التفسير الهندسي للنتيجة : محور الفواصل مستقيم مقارب للمنحني (c_f) بجوار $-\infty$

ب- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

من السؤال 1- أ- وجدنا أن $f'(x)=(3x+7)e^{x}$ وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $(3x+7)$ ومنه النتائج التالية :

$f'(x)=0$ يكافئ $x=-\frac{7}{3}$

$f'(x)<0$ يكافئ $x<-\frac{7}{3}$

$f'(x)>0$ يكافئ $x>-\frac{7}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

إذن : الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty\,;\,-\frac{7}{3}\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{7}{3}\,;\,+\infty\right[$.

- جدول تغيّرات الدالة f :

$f\left(-\frac{7}{3}\right)=-3e^{-\frac{7}{3}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-3e^{-\frac{7}{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ- كتابة معادلة للمماس (Δ) للمنحني (c_f) في النقطة ω التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$:

تذكير : معادلة مماس المنحني الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي :

$y=f'(a).(x-a)+f(a)$

وعليه فإن معادلة المماس (Δ) هي :

$$y=-3e^{-\frac{10}{3}}\left(x+\frac{10}{3}\right)-6e^{-\frac{10}{3}}=-3e^{-\frac{10}{3}}x-16e^{-\frac{10}{3}}$$

ب- تبيان أن ω هي نقطة انعطاف للمنحني (c_f) :

تذكير : f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I ، x_0 عدد حقيقي من I .

إذا انعدمت الدالة المشتقة f'' عند x_0 مغيّرة إشارتها فإن النقطة $M_0\left(x_0\,;f(x_0)\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحني الممثل للدالة f .

الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و $f''(x)=(3x+10)e^x$

$f''(x)=0$ يكافئ $3x+10=0$ ومنه : $x=-\frac{10}{3}$

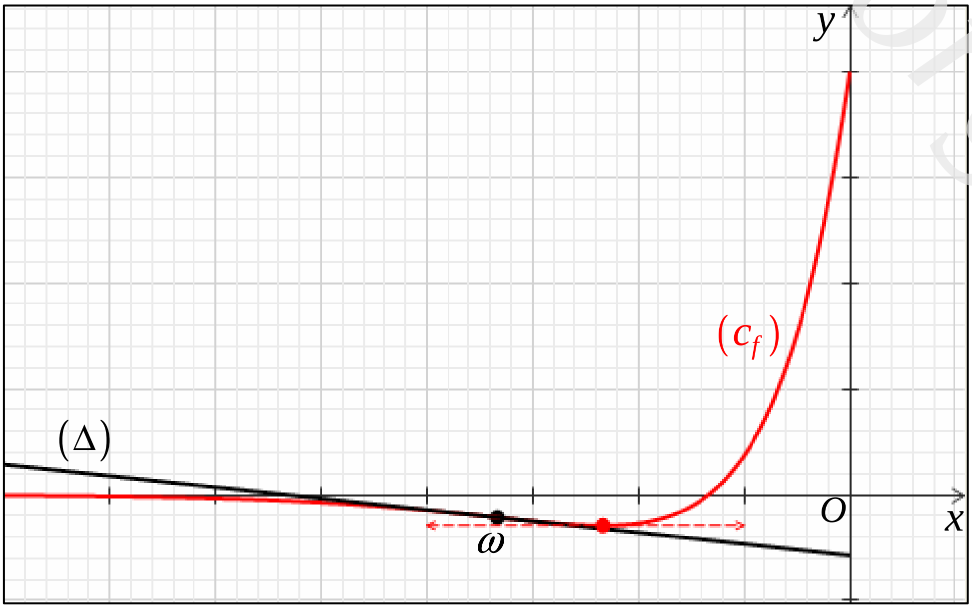
$f''(x)>0$ يكافئ $x>-\frac{10}{3}$

$f''(x)<0$ يكافئ $x<-\frac{10}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{10}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

الدالة f'' تنعدم عند $x_0=-\frac{10}{3}$ مغيّرة إشارتها وبالتالي فإن النقطة ω هي نقطة انعطاف للمنحني (c_f) .

جـ- رسم (Δ) و (c_f) على المجال $]-\infty\,;0]$:



4) أ- حساب $\int_{-1}^{x} te^{t}dt$:

تذكير بطريقة المكاملة بالتجزئة : لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين لهما u' و v' مستمرتان على I .

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I ، لدينا :

$$\boxed{\int_{a}^{b} u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} u'(x)v(x)dx}$$

نضع : $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{t} \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = e^{t} \end{cases}$

وبالتالي :

$$\int_{-1}^{x} te^{t}dx = \left[te^{t}\right]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} e^{t}dx$$
$$= \left[(t-1)e^{t}\right]_{-1}^{x} = (x-1)e^{x} + \frac{2}{e}$$

- استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$:

لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$

لدينا : $f(x) = (3x+4)e^{x} = 3xe^{x} + 4e^{x}$

ومنه : $F(x) = 3(x-1)e^{x} + 4e^{x} + k = (3x+1)e^{x} + k$

إذن : $F(x) = (3x+1)e^{x} + k$ حيث k ثابت حقيقي .

ب- حساب $\mathrm{A}(\lambda)$:

$$\mathrm{A}(\lambda) = -\int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} f(x)dx = -\int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} (3x+4)e^{x}dx =$$
$$= -\left[(3x+1)e^{x}\right]_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} = (3\lambda+1)e^{\lambda} + 3e^{-\frac{4}{3}}$$

إذن : $\mathrm{A}(\lambda) = (3\lambda+1)e^{\lambda} + 3e^{-\frac{4}{3}}\,u.a$

- حساب $\lim_{\lambda\to-\infty} \mathrm{A}(\lambda)$:

لدينا : $A(\lambda)=(3\lambda+1)e^{\lambda}+3e^{-\frac{4}{3}}=3\lambda e^{\lambda}+e^{\lambda}+3e^{-\frac{4}{3}}$

ونعلم أن : $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} e^{\lambda}=0$ و $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} 3\lambda e^{\lambda}=0$

ومنه : $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)=3e^{-\frac{4}{3}}$

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1) حل المعادلة (E) :

طريقة أولى : (استعمال مبرهنة غوص)

- تعيين حل خاص للمعادلة (E) :

الثنائية $(x_0\ ;\ y_0)=(1\,;2)$ حل خاص للمعادلة (E)

- حل المعادلة (E) :

لدينا : $\begin{cases}13x-7y=-1\\ 13x_0-7y_0=-1\end{cases}$ ومنه : $13(x-x_0)-7(y-y_0)=0$

وبالتالي : $13(x-x_0)=7(y-y_0)$ ... $(*)$

من المساواة $(*)$ نستنتج أن 7 يقسم الجداء $13(x-x_0)$

وبما أن 7 و 13 أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص فإن 7 يقسم $x-x_0$

ومنه : $x-x_0=7k$ وبالتالي : $x=7k+1$ وبالتعويض في المعادلة (E)

نجد : $y=13k+2$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x\,;y)$ حيث : $(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}x=7k+1\\ y=13k+2\end{cases}$

طريقة ثانية : (استعمال طريقة الموافقة)

تكتب المعادلة (E) باستعمال الموافقة بترديد 7 كما يلي : $13x\equiv-1\ [7]$

ونعلم أن : $13\equiv-1\ [7]$ وبالتالي : $-x\equiv-1\ [7]$ ومنه : $x\equiv1\ [7]$

وعليه : $x=7k+1$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $y=13k+2$

2) تعيين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث $\begin{cases}a\equiv-1[7]\\ a\equiv0[13]\end{cases}$:

لدينا : $\begin{cases}a\equiv-1[7]\\ a\equiv0[13]\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}a=7\lambda-1\\ a=13\lambda'\end{cases}$ حيث λ و λ' عددان صحيحان

وبالتالي : $7\lambda-1=13\lambda'$ أي : $13\lambda'-7\lambda=-1$

وحسب السؤال السابق نستنتج أن : $(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}\lambda'=x=7k+1\\ \lambda=y=13k+2\end{cases}$

وبالتعويض في $a=7\lambda-1$ أو في $a=13\lambda'$ نجد : $a=91k+13$
إذن : $a=91k+13$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

3) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 7 :

$9^0\equiv1\,[7]$ ، $9^1\equiv2\,[7]$ ، $9^2\equiv4\,[7]$ ، $9^3\equiv1\,[7]$

نستنتج أن : $9^{3k}\equiv1\,[7]$ ، $9^{3k+1}\equiv2\,[7]$ ، $9^{3k+2}\equiv4\,[7]$

إذن : بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 7 دورية ودورها 3 نلخصها في الجدول الآتي : (في هذا الجدول يدلّ k على عدد طبيعي)

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
البواقي	1	2	4

● دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 :

$9^0\equiv1\,[13]$ ، $9^1\equiv9\,[13]$ ، $9^2\equiv3\,[13]$ ، $9^3\equiv1\,[13]$

نستنتج أن : $9^{3k'}\equiv1\,[13]$ ، $9^{3k'+1}\equiv9\,[13]$ ، $9^{3k'+2}\equiv3\,[13]$

إذن : بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 دورية ودورها 3 نلخصها في الجدول الآتي : (في هذا الجدول يدلّ k' على عدد طبيعي)

n	$3k'$	$3k'+1$	$3k'+2$
البواقي	1	9	3

4) تعيين α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91 :

بما أن $b=\overline{\alpha00\beta086}^{\,9}$ و $\alpha\neq0$ فإن $1\le\alpha\le8$ و $0\le\beta\le8$

$$b=\overline{\alpha00\beta086}^{\,9}=6+8\times9+0\times9^2+\beta\times9^3+0\times9^4+0\times9^5+\alpha\times9^6$$
$$=6+8\times9+\beta\times9^3+\alpha\times9^6$$

لدينا : $b\equiv0[91]$ أي : $b\equiv0[7\times13]$ ومنه : $\begin{cases}b\equiv0[7]\\ b\equiv0[13]\end{cases}$

وباستعمال نتائج السؤال (3) نحصل على الجملة : $\begin{cases}\alpha+\beta\equiv-1[7]\\ \alpha+\beta\equiv0[13]\end{cases}$

ومنه : $(\alpha;\beta)\in\{(5;8),(6;7),(7;6),(8;5)\}$

ملاحظة : لتعيين α و β ، يمكن الاستعانة بالجدول الآتي :

β \ α	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	9	10	11	12	13	14	15	16

التمرين الثاني :

1) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) :

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (D) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u}$. ومنه التمثيل الوسيطي الآتي :

$$\begin{cases} x=-t+1 \\ y=t \\ z=\frac{3}{2}t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t' بحيث : $\overrightarrow{CM}=t\,\vec{v}$. ومنه التمثيل الوسيطي الآتي :

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}t' \\ y=t' \\ z=-3t'+3 \end{cases} \quad (t'\in\mathbb{R})$$

- دراسة الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (Δ) :

لدينا : $\vec{u}\left(-1;1;\frac{3}{2}\right)$ و $\vec{v}\left(\frac{1}{2};1;-3\right)$ وبالتالي فإن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا ، وعليه فإن المستقيمين (D) و (Δ) إما من نفس المستوي

ومتقاطعان وإما ليسا من نفس المستوي .

للبحث عن نقط تقاطع (D) و (Δ) نقوم بحل الجملة :

$$\begin{cases} -t+1=\frac{1}{2}t' \\ t=t' \\ \frac{3}{2}t=-3t'+3 \end{cases}$$

بحل الجملة : $\begin{cases} -t+1=\frac{1}{2}t' \\ t=t' \\ \frac{3}{2}t=-3t'+3 \end{cases}$ نجد : $t=t'=\frac{2}{3}$ ومنه : $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3} \\ z=1 \end{cases}$

إذن : $(D)\cap(\Delta)=\left\{G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)\right\}$

2) تبيان أن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$:

لدينا : $\overrightarrow{GA}\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-1\right)$ ، $\overrightarrow{GB}\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};-1\right)$ و $\overrightarrow{GC}\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};2\right)$

وبما أن : $\begin{cases} \frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0 \\ -\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=0 \\ -1-1+2=0 \end{cases}$ فإن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

- الاستنتاج : نستنتج أن النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC .

3) تعيين شعاع ناظمي $\vec{n}$ للمستوي (ABC) وكتابة معادلة ديكارتية له :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;3)$

واضح أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن مثلا : $\frac{-1}{-1}\neq\frac{0}{3}$

وبالتالي فإن النقط A ، B و C ليست في استقامية ، فهي تعيّن مستويا (ABC) .

إذا كان $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) فإن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\vec{n} \\ \overrightarrow{AC}\perp\vec{n} \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n}=0 \\ \overrightarrow{AC}.\vec{n}=0 \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} -a+2b=0 \\ -a+3c=0 \end{cases}$ وبحل هذه الجملة مع

فرض $a=6$ نجد : $\vec{n}(6;3;2)$.

تكون عندئذ معادلة للمستوي (ABC) من الشكل $6x+3y+2z+d=0$

ولدينا : $A\in(ABC)$ ومنه : $6\times1+3\times0+2\times0+d=0$ ينتج : $d=-6$

إذن : معادلة للمستوي (ABC) هي $\boxed{6x+3y+2z-6=0}$

4) حساب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) :

تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث :

$$\boxed{d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

وباستعمال المساواة المؤطرة نجد :

$$d(O;(ABC))=\frac{|0+0+0-6|}{\sqrt{36+9+4}}=\frac{6}{\sqrt{49}}=\frac{6}{7}$$

5) أ- إيجاد إحداثيات النقطة H :

نفرض أن إحداثيات النقطة H هي $(x\ ;y\ ;z)$

بما أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D) فإن

$\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{BH}\\ H\in(D)\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}\vec{u}.\overrightarrow{BH}=0\\ H\in(D)\end{cases}$ وبحل الجملة $\begin{cases}-x+(y-2)+\frac{3}{2}z=0\\ x=-t+1\\ y=t\\ z=\frac{3}{2}t\end{cases}$

نجد : $t=\frac{12}{17}$ وبالتعويض في الجملة : $\begin{cases}x=-t+1\\ y=t\\ z=\frac{3}{2}t\end{cases}$

نجد : $H\left(\frac{5}{17};\frac{12}{17};\frac{18}{17}\right)$

ب- استنتاج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D) :

تذكير : $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتان من الفضاء .

$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

المسافة بين النقطة B والمستقيم (D) هي BH .

لدينا : $B\left(0;2;0\right)$ و $H\left(\frac{5}{17};\frac{12}{17};\frac{18}{17}\right)$ ومنه : $BH=\sqrt{\frac{833}{289}}=\frac{7}{17}\sqrt{17}$

التمرين الثالث :

1) أ- خطأ

لدينا : $|a|=\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=1$ و $\arg(a)=\frac{3\pi}{4}$

وبالتالي فإن الشكل المثلثي للعدد المركب a هو $\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$

ب- صحيح

تذكير بدستور موافر : θ عدد حقيقي كيفي و n عدد صحيح .

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

لدينا :

$$a^{2011}=\cos\frac{3\times2011\pi}{4}+i\sin\frac{3\times2011\pi}{4}$$

$$=\cos\left(1508\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(1508\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ولدينا : $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه : $\overline{a}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

وبالتالي : $a^{2011}+\overline{a}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

2) أ- خطأ

العبارة المركبة للتحويل T من الشكل $z'=az$ حيث : $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومن السؤال -1- أ- وجدنا أن : $|a|=\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=1$ و $\arg(a)=\frac{3\pi}{4}$

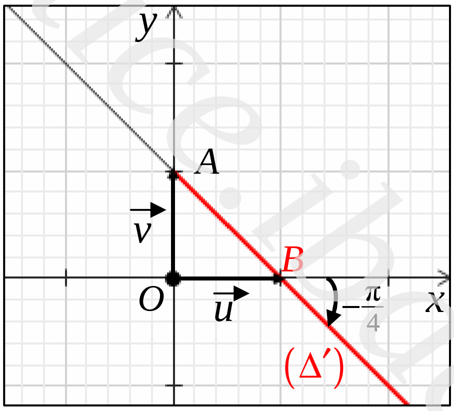
نستنتج أن التحويل T دوران زاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم .

ب- خطأ

تذكير : $\arg(z-i)=\arg(z_M-z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{AM})\ [2\pi]$

$\arg(z-i)=-\frac{\pi}{4}$ معناه : $(\vec{u};\overrightarrow{AM})\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

إذن : مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z-i)=-\frac{\pi}{4}$ هي نصف المستقيم $]AB)$ الذي يشمل النقطة B ذات اللاحقة 1 وشعاع توجيهه $\vec{w}'$ لاحقته $1-i$. (مجموعة النقط M هي نصف مستقيم مفتوح مبدؤه A)



3) أ- صحيح

نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$$

نسمي p_n الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$ "

- التحقق من صحة p_0 :

الطرف الأول يساوي $u_0=\frac{1}{12}$

الطرف الثاني يساوي $-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^0+\frac{2}{3}=-\frac{7}{12}+\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$

ومنه : الطرف الأول يساوي الطرف الثاني وبالتالي فإن p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$

ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $u_{n+1}=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{2}{3}$

لدينا : $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{6}$ ومنه : $u_{n+1}=\frac{3}{4}\left[-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}\right]+\frac{1}{6}$

وبالتالي : $u_{n+1}=-\frac{7}{12}\times\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{2}{3}$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

- إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$

ب- خطأ

من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{2}{3}+\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left[\frac{3}{4}-1\right]=\frac{7}{48}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

وبما أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{7}{48}\left(\frac{3}{4}\right)^n>0$ فإن : $u_{n+1}-u_n>0$

وبالتالي : (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- خطأ

تذكير : إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}q^n=0$ وبالتالي : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

لدينا : $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$ ونعلم أن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

وبالتالي : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2}{3}$ وعليه فإن المتتالية (u_n) متقاربة .

التمرين الرابع :

1) أ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة g :

من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{2(x^2+1)}{x}>0$

وبالتالي فإن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

- جدول تغيّرات الدالة g :

نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x^2 = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

ولدينا : $\lim\limits_{x \to 0} \ln x^2 = -\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

ب- احسب $g(1)$: $g(1) = 0$

● استنتاج إشارة $g(x)$ في المجال $]0 ; +\infty[$:

- $g(x) = 0$ يكافئ $x = 1$
- $g(x) < 0$ يكافئ $x \in]0 ; 1[$
- $g(x) > 0$ يكافئ $x \in]1 ; +\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) أ- تبيان أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$:

الدالة $x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ (دالة ناطقة) وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، الدالة $x \mapsto \ln x$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ (دالة لوغاريتمية نيبيرية)

نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$.

● تبيان أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0 ; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$:

تذكير : $(uv)' = u'v + v'u$

$$f'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)'\times\ln x \;+\; (\ln x)'\times\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\frac{2}{x^3}\times\ln x \;+\; \frac{1}{x}\times\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\frac{2\ln x}{x^3} \;+\; \frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}=\frac{2\ln x+x^2-1}{x^3}$$

ونعلم أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0\,;\,+\infty[$ ، $\ln x^2=2\ln x$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x من $]0\,;\,+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$

- استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ ومنه النتائج الآتية :

- $f'(x)=0$ يكافئ $x=1$
- $f'(x)<0$ يكافئ $x\in]0\,;1[$
- $f'(x)>0$ يكافئ $x\in]1\,;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0\,;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

- جدول تغيّرات الدالة f :

- لدينا : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\ln x=-\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=+\infty$

- ولدينا : $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\ln x=\ln x-\dfrac{\ln x}{x^2}$

ونعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f(1)=0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ب- دراسة وضعية (c_f) بالنسبة إلى (δ) :

طريقة : لدراسة وضعية المنحني (c_f) بالنسبة إلى المنحني (δ) نقوم بحساب الفرق $f(x)-\ln x$ وندرس إشارته.

لدينا : $f(x)-\ln x=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\ln x-\ln x=-\dfrac{\ln x}{x^2}$

إشارة الفرق $f(x)-\ln x$ من نفس إشارة $-\ln x$ ومنه النتائج الآتية :

- $f(x)-\ln x=0$ يكافئ $x=1$
- $f(x)-\ln x>0$ يكافئ $x\in]0;1[$
- $f(x)-\ln x<0$ يكافئ $x\in]1;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-\ln x$		$+$	0	$-$	

- إذا كان $x=1$ فإن المنحنيين (c_f) و (δ) يتقاطعان في النقطة $H(1;0)$.
- إذا كان $x\in]0;1[$ فإن (c_f) يقع فوق (δ) .
- إذا كان $x\in]1;+\infty[$ فإن (c_f) يقع تحت (δ) .

- إيجاد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\ln x$:

نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ (نتائج التزايد المقارن للدالتين $x\mapsto \ln x$ $x\mapsto x$)

ونعلم أيضا أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\times\dfrac{\ln x}{x}=0\times0=0$

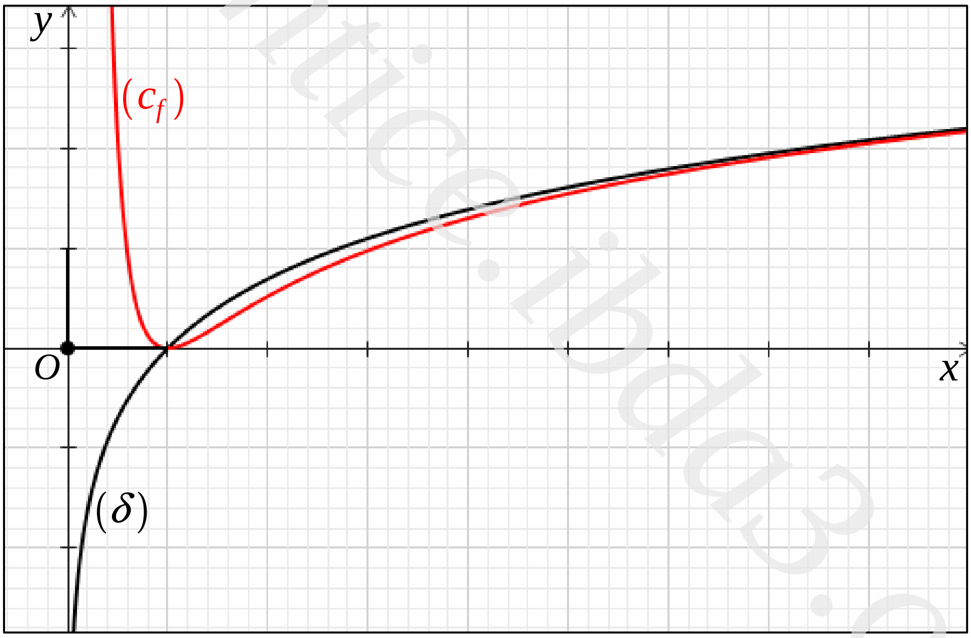
إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\ln x=0$

● الاستنتاج :

من السؤال 2- ب- وجدنا أن : $f(x)-\ln x=-\frac{\ln x}{x^2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$

نستنتج أن المنحني (c_f) مقارب للمنحني (δ) في جوار $+\infty$.

● ارسم (δ) و (c_f) :



3) أ- حساب $\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\,dt$:

تذكير بطريقة المكاملة بالتجزئة : لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين لهما u' و v' مستمرتان على I .

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I ، لدينا :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

نضع : $\begin{cases}u(t)=\ln t\\ v'(t)=\frac{1}{t^2}\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}u'(t)=\frac{1}{t}\\ v(t)=-\frac{1}{t}\end{cases}$

وبالتالي :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt=\left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x-\int_1^x \frac{-1}{t^2}dt$$

$$=\left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x-\left[\frac{1}{t}\right]_1^x=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+1$$

إذن : $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+1$

- التحقق أن $x\mapsto x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $[1\,;\,+\infty[$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1\,;\,+\infty[$ ، لدينا :

$$(x\ln x-x)'=(x\ln x)'-(x)'$$

$$=(x)'\times\ln x+(\ln x)'\times x-1$$

$$=\ln x+\frac{1}{x}\times x-1=\ln x$$

إذن : $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $[1\,;\,+\infty[$.

- استنتاج F دالة أصلية للدالة f على المجال $[1\,;\,+\infty[$:

لدينا : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x=\ln x-\frac{1}{x^2}\ln x$

ومنه : $F(x)=x\ln x-x+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}-1$

ب- حساب $\mathrm{A}(\alpha)$:

$$\mathrm{A}(\alpha)=\int_1^{\alpha}[\ln x-f(x)]dx=\int_1^{\alpha}\frac{1}{x^2}\ln x\,dx$$

$$=-\frac{\ln\alpha}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+1$$

إذن : $\mathrm{A}(\alpha)=-\frac{\ln\alpha}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+1\quad u.a$

- حساب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathrm{A}(\alpha)$:

نعلم أن : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln\alpha}{\alpha}=0$ وَ $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\alpha}=0$ ومنه : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathrm{A}(\alpha)=1$