

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

- 1 أ- تبيان أنه إذا كانت $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7 :
 تذكير بمبرهنة غوص : a ، b و c أعداد صحيحة غير معدومة .
 إذا قسم العدد a الجداء $b \times c$ وكان a أوليا مع b فإن a يقسم c .
 لدينا : $7x + 65y = 2009$ ومنه : $65y = 2009 - 7x$
 وبالتالي : $65y = 7(287 - x)$ ، نستنتج أن 7 يقسم $65y$ وبما أن 7 أولي مع 65
 وحسب غوص فإن 7 يقسم y وهذا يعني أن y مضاعف للعدد 7 .
إذن : إذا كانت الثنائيات $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7 .
ب- حل المعادلة (1) :

y مضاعف للعدد 7 معناه : يوجد عدد صحيح k بحيث $y = 7k$ وبالتعويض في
 المعادلة (1) نحصل على : $x = 287 - 65k$.
إذن : حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x; y)$ حيث :

$$\begin{cases} x = -65k + 287 \\ y = 7k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- 2 دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9 :
 $2^0 \equiv 1[9]$ ، $2^1 \equiv 2[9]$ ، $2^2 \equiv 4[9]$ ، $2^3 \equiv 8[9]$ ، $2^4 \equiv 7[9]$ ،
 $2^5 \equiv 5[9]$ ، $2^6 \equiv 1[9]$. نستنتج أن بواقي قسمة 2^n على 9 دورية ودورها 6
 نلخصها في الجدول الآتي : (في هذا الجدول k عدد طبيعي)

n	$6k$	$6k + 1$	$6k + 2$	$6k + 3$	$6k + 4$	$6k + 5$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	7	5

- 3 تعيين قيم n بحيث يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9 :
 من السؤال 2 نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{6n} \equiv 1[9]$ ،
 تكتب عندئذ العلاقة : $2^{6n} + 3n + 2 \equiv 0[9]$ كما يلي : $1 + 3n + 2 \equiv 0[9]$
 ومنه : $3n \equiv 6[9]$ ، وعليه : $n \equiv 2[3]$ وبالتالي : $n = 3\alpha + 2$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$
إذن : يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9 من أجل $n = 3\alpha + 2$ ، $\alpha \in \mathbb{N}$
 4 أ- التحقق أن u_n يقبل القسمة على 9 :
 من السؤال 2 نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{6n} \equiv 1[9]$ ،

ومنه : $2^{6n} - 1 \equiv 0 [9]$ أي : $u_n \equiv 0 [9]$.
إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n يقبل القسمة على 9 .
ب- حل المعادلة (2) :

لدينا : $u_1 = 2^6 - 1 = 63$ و $u_2 = 2^{12} - 1 = 4095$
تكتب عندئذ المعادلة (2) كما يلي : $7 \times 63 x + 4095 y = 126567$
وبقسمة الطرفين على 63 نحصل على المعادلة : $7x + 65y = 2009$ أي أن
المعادلة (2) تكافئ المعادلة (1) . نستنتج أن لهما نفس مجموعة الحلول .

إذن : حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x; y)$ حيث :

$$\begin{cases} x = -65k + 287 \\ y = 7k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ج- تعيين الثنائية $(x; y)$ حل (2) حيث x_0 و y_0 عدنان طبيعيين مع $y_0 \geq 25$:
لدينا : $x_0 \geq 0$ و $y_0 \geq 25$ ومنه : $-65k + 287 \geq 0$ و $7k \geq 25$
وبالتالي : $k \leq 4.41$ و $k \geq 3.57$ نستنتج أن $k = 4$.
إذن : $(x; y) = (27; 28)$.

التمرين الثاني : (4.5 نقطة)

1 تبيان أن النقط A ، B و C ليست في استقامية :

تذكير : النقط A ، B و C ليست في استقامية معناه : الشعاعان \vec{AB} و \vec{AC} غير مرتبطين خطيا .

• \vec{AB} و \vec{AC} مرتبطان خطيا يعني وجود عدد حقيقي t حيث : $\vec{AC} = t \vec{AB}$
لدينا : $\vec{AB}(-2; 1; 0)$ و $\vec{AC}(-2; 0; 2)$ وبالتالي فإن الشعاعين \vec{AB} و \vec{AC} غير مرتبطين خطيا (لا يوجد عدد حقيقي t بحيث $\vec{AC} = t \vec{AB}$) .
إذن : النقط A ، B و C ليست في استقامية .

2 إيجاد معادلة للمستوي (ABC) :

بما أن النقط A ، B و C ليست في استقامية ، فإنها تعين مستويا (ABC) .

إذا كان $\vec{n}(a; b; c)$ شعاعا ناظما للمستوي (ABC) فإن :

$$\begin{cases} \vec{AB} \perp \vec{n} \\ \vec{AC} \perp \vec{n} \end{cases}$$

ومنه : $\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{AC} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} -2a + b = 0 \\ -2a + 2c = 0 \end{cases}$ وبحل هذه الجملة مع

فرض $c=1$ نجد : $\vec{n}(1; 2; 1)$.

تكون عندئذ معادلة للمستوي (ABC) من الشكل $x + 2y + z + d = 0$

ولدينا : $A \in (ABC)$ ومنه : $2 + 2 \times 0 + 0 + d = 0$ ينتج : $d = -2$

إذن : معادلة للمستوي (ABC) هي $x + 2y + z - 2 = 0$

3 إيجاد تمثيل وسيطي للمستقيم (BC) :

تكون $M(x; y; z)$ نقطة من (BC) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث :

$\vec{BM} = t \vec{BC}$. لدينا : $\vec{BC}(0; -1; 2)$ ومنه التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t \end{cases}$$

4 أ- تبيان أن المستويين (P) و (ABC) متقاطعان :

$\vec{u}(2; 2; 1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n}(1; 2; 1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC)
الشعاعان \vec{u} و \vec{n} غير مرتبطين خطياً (لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\vec{u} = k \vec{n}$)
نستنتج أن المستويين (P) و (ABC) متقاطعان .

ب- تبيان أن المستوي (P) يشمل النقطتين B و C :

المستوي (P) يشمل النقطتين B و C إذا وفقط إذا كانت إحداثيات كل من B و C
تحقق المعادلة $2x + 2y + z - 2 = 0$.

لدينا : $2 \times 0 + 2 \times 1 + 0 - 2 = 2 - 2 = 0$ ومنه : $B \in (P)$

ولدينا : $2 \times 0 + 2 \times 0 + 2 - 2 = 2 - 2 = 0$ ومنه : $C \in (P)$

إذن : المستوي (P) يشمل النقطتين B و C .

• الاستنتاج : المستقيم (BC) هو مستقيم تقاطع المستويين (P) و (ABC) .

5 تعيين المجموعة (E) :

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{2MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| \text{ يكافئ } M \in (E)$$

لتكن G مركز ثقل المثلث ABC ومنه : $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

ولدينا : $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = 2\vec{MA} - (\vec{MA} + \vec{AB}) - (\vec{MA} + \vec{AC})$

$$= -(\vec{AB} + \vec{AC}) = -\vec{AD}$$

حيث $ABDC$ متوازي أضلاع (إحداثيات النقطة D هي $(-2; 1; 2)$) .

ومنه $M \in (E)$ يكافئ $\|3\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{AD}\|$ وبالتالي $GM = \frac{1}{3}AD$
إذن : (E) هي سطح الكرة التي مركزها النقطة $G\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ ونصف قطرها $\frac{1}{3}AD = AG = \frac{\sqrt{21}}{3}$ (يمكن تعيين المجموعة (E) تحليليا أي بمعادلة) .

التمرين الثالث : (4.5 نقطة)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة $(E) : z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = 0$...
1 أ- التحقق أن 3 حل للمعادلة (E) :

لدينا : $3^3 - 3 \times 3^2 + 3 \times 3 - 9 = 36 - 36 = 0$ ومنه : 3 حل للمعادلة (E) .
 • تعيين a ، b و c : $z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = (z - 3)(az^2 + bz + c)$
 من أجل كل z من \mathbb{C} :

$$(z - 3)(az^2 + bz + c) = \dots = az^3 + (b - 3)z^2 + (c - 3b)z - 3c$$

ومنه : $az^3 + (b - 3)z^2 + (c - 3b)z - 3c = z^3 - 3z^2 + 3z - 9$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} a = 1 \\ b - 3 = -3 \\ c - 3b = 3 \\ -3c = -9 \end{cases}$$

نستنتج أن :

إذن : من أجل كل z من \mathbb{C} ، $(z - 3)(z^2 + 3) = 0$ ،
ب- حل المعادلة (E) :

لدينا : $z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = 0$ يكافئ $(z - 3)(z^2 + 3) = 0$
 ومنه : $z - 3 = 0$ أو $z^2 + 3 = 0$
 وبالتالي : $z = 3$ أو $z^2 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

إذن : للمعادلة (E) ثلاثة حلول هي $z_1 = 3$ ، $z_2 = i\sqrt{3}$ و $z_3 = -i\sqrt{3}$.
2 تبيان أن المثلث ABC متقايس الأضلاع :

لدينا : $AB = |z_B - z_A| = |i\sqrt{3} - 3| = 2\sqrt{3}$

$AC = |z_C - z_A| = |-i\sqrt{3} - 3| = 2\sqrt{3}$

$BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

ومنه : $AB = AC = BC$. إذن : المثلث ABC متقايس الأضلاع .
 3) تعيين لاحقة النقطة E :

تذكير : الكتابة المركبة للدوران الذي مركزه $M_0(z_0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل

نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)$

وعليه فإن الكتابة المركبة لهذا الدوران هي : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$

ومنه : $z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}z_D = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$

4) أ- حساب $\frac{z_F}{z_E}$:

$$\frac{z_F}{z_E} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i} \times \frac{-\sqrt{3} + i}{-\sqrt{3} + i} = i$$

استنتاج أن المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان :

تذكير بالتفسير الهندسي لـ $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)$

إذا كانت A ، B و M صور الأعداد المركبة z_A ، z_B و z على الترتيب

حيث $z \neq z_B$ فإن : $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) \equiv (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) [2\pi]$

نعلم أن : $\arg\left(\frac{z_F}{z_E}\right) \equiv \arg\left(\frac{\overrightarrow{OE}}{\overrightarrow{OF}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_F}{z_E}\right) [2\pi]$ و $\arg\left(\frac{z_F}{z_E}\right) \equiv \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

ومنه : $(\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{OF}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ نستنتج أن $(OE) \perp (OF)$.

ب- تعيين لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا :

لدينا : $z_E = -\sqrt{3} - i$ و $z_F = 1 - i\sqrt{3}$.

ونعلم أن : $(OE) \perp (OF)$ ، ومن جهة أخرى : $OE = OF = 2$

وبالتالي فإن المثلث OEF قائم في النقطة O ومتساوي الساقين ، نستنتج أن النقطة G هي نظيرة النقطة O بالنسبة إلى I منتصف القطعة $[EF]$.

$$z_I = \frac{z_E + z_F}{2} = \frac{z_O + z_G}{2}$$

ومنه : $z_G = (z_E + z_F) = 1 - \sqrt{3} - i(\sqrt{3} + 1)$

التمرين الرابع :

الجزء I :

1 دراسة تغيرات الدالة g :

• النهايات :

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x)e^x = -\infty$ ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3-x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x - \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

(لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$) ومنه : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

• اتجاه التغير :

من أجل كل x من \mathbb{R} ، $g'(x) = (3-x)' \times e^x + (e^x)' \times (3-x) = (2-x)e^x$ ، إشارة $g'(x)$ هي إشارة $2-x$ ، نستنتج أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty ; 2]$ و متناقصة تماما على المجال $[2 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	0	$e^2 - 3$	$-\infty$

• جدول التغيرات :

$$g(2) = e^2 - 3$$

2 تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α :

لدينا : $g(0) = (3-0)e^0 - 3 = 3 - 3 = 0$ ومنه 0 حل للمعادلة $g(x) = 0$.

تذكير بمبرهنة القيم المتوسطة . إذا كان :

1 g مستمرة على المجال $[a; b]$ ؛

2 g رتيبة تماما على المجال $[a; b]$ ؛

3 $g(a) \times g(b) < 0$.

فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]a; b[$.

من جدول تغيرات g نلاحظ أنها مستمرة و متناقصة تماما على $[2.82 ; 2.83]$

زيادة على ذلك : $g(2.82) \approx 0.06$ و $g(2.83) \approx -0.08$

وبالتالي : $g(2.82) \times g(2.83) < 0$

نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2.82 < \alpha < 2.83$.

إذن : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha \in]2.82; 2.83[$.
3 استنتاج إشارة $g(x)$:

- $g(x)=0$ يكافئ $x \in \{0; \alpha\}$
- $g(x)<0$ يكافئ $x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[$
- $g(x)>0$ يكافئ $x \in]0; \alpha[$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	-

الجزء II :

1 أ- تبيان أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$:

تذكير : القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه عندما يؤول x إلى a ، فإن نسبة تزايد f بين العددين a و x تؤول إلى عدد حقيقي L ، أي :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \text{لدينا :}$$

$$\text{ونعلم أن : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ وبالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \times x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \times x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \times x = 1 \times 0 = 0$$

إذن : الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ وعددها المشتق عند 0 هو $f'(0)=0$

ب- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحني (C_f) عند المبدأ O :

تذكير : معادلة مماس المنحني الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي :

$$y = f'(a).(x - a) + f(a)$$

لدينا : $f(0)=0$ و $f'(0)=0$ وبالتالي فإن معادلة المماس (T) هي $y = 0$

$$\textcircled{2} \text{ أ- تبيان أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$$

$$\text{تذكير : } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0 \text{ و } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u^n} = +\infty \text{ (} n \text{ عدد طبيعي) .}$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x^3}\right)} = 0$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$$

$$\bullet \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = 0$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\bullet \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\text{نعلم أن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ ومنه : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{ب- تبيان أنه من أجل } x \neq 0 \text{ فإن } f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x)$$

$$\text{تذكير : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\text{من أجل } x \neq 0$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^3)'(e^x - 1) - (e^x - 1)' \times x^3}{(e^x - 1)^2} = \frac{3x^2(e^x - 1) - x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{x^2[(3-x)e^x - 3]}{(e^x - 1)^2} = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x) \end{aligned}$$

$$\text{ج- التحقق أن } f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$$

لدينا : $g(\alpha) = 0$ أي : $(3 - \alpha)e^\alpha - 3$ ومنه : $e^\alpha = \frac{3}{3 - \alpha}$ وبالتالي :

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{e^\alpha - 1} = \frac{\alpha^3}{\frac{3}{3 - \alpha} - 1} = \frac{\alpha^3}{\frac{\alpha}{3 - \alpha}} = \alpha^3 \times \frac{3 - \alpha}{\alpha} = \alpha^2(3 - \alpha)$$

إذن : $f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$.

● تعيين حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $2.82 < \alpha < 2.83$ ومنه : $-2.82 < -\alpha < -2.83$ (الضرب في -1)
وبإضافة العدد 3 لجميع الحدود ينتج : $3 - 2.83 < 3 - \alpha < 3 - 2.82$
وبالتالي : $0.17 < 3 - \alpha < 0.18 \dots (1)$

ومن : $2.82 < \alpha < 2.83$ نحصل على : $(2.82)^2 < \alpha^2 < (2.83)^2$

وبالتالي : $7.95 < \alpha^2 < 8.01 \dots (2)$

من (1) و (2) وبالضرب طرف في طرف ينتج : $1.35 < \alpha^2(3 - \alpha) < 1.44$

إذن : $1.35 < f(\alpha) < 1.44$

د- جدول تغيّرات الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ ، وبالتالي فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; \alpha]$ ومنتاقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $[\alpha; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$+\infty$		$f(\alpha)$	$-\infty$
		0		

3 أ- حساب $f(x) + x^3$:

$$f(x) + x^3 = \frac{x^3}{e^x - 1} + x^3 = \frac{x^3 e^x}{e^x - 1} \quad \text{من أجل } x \neq 0$$

● استنتاج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $-x^3$: $x \mapsto -x^3$

إشارة الفرق $f(x) - (-x^3)$ أي $f(x) + x^3$ هي إشارة الجداء $x(e^x - 1)$ يمكن الاستعانة بجدول الإشارة للحصول على النتائج الآتية :
 - إذا كان $x = 0$ يكون $f(x) - (-x^3) = 0$ ومنه (C) يقطع (C_f) في النقطة O
 - إذا كان $x \neq 0$ يكون $f(x) - (-x^3) > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (C) .
ب- تبيان أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x^3) = 0$:

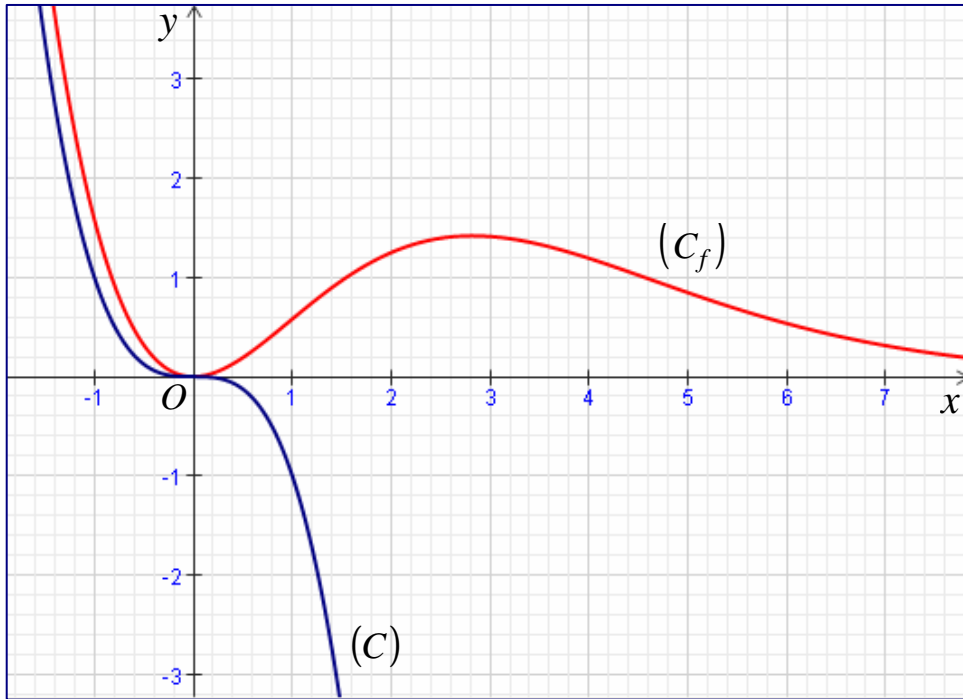
$$f(x) + x^3 = \frac{x^3}{e^x - 1} + x^3 = \frac{x^3 e^x}{e^x - 1} \quad \text{من أجل } x \neq 0, \text{ لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 e^x}{e^x - 1} = 0 \quad \text{ومنه :} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x = 0$$

$$\text{إذن :} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x^3) = 0$$

• هندسيا : المنحني (C) هو منحنى مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

4 رسم (C) و (C_f) :



حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1 البرهان أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n} - 1 \equiv 0 [13]$:
 لدينا : $3^{3n} = (3^3)^n = (27)^n$ ونعلم أن $27 \equiv 1 [13]$ ومنه $(27)^n \equiv 1 [13]$ وبالتالي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n} \equiv 1 [13]$.
إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n} - 1 \equiv 0 [13]$.

2 استنتاج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+1} - 3 \equiv 0 [13]$:
 من السؤال 1 وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n} - 1 \equiv 0 [13]$.
 ومنه : $3 \times (3^{3n} - 1) \equiv 3 \times 0 [13]$ وبالتالي : $3 \times 3^{3n} - 3 \times 1 \equiv 0 [13]$.
نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+1} - 3 \equiv 0 [13]$.

• استنتاج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+2} - 9 \equiv 0 [13]$:
 من السؤال 1 وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n} - 1 \equiv 0 [13]$.
 ومنه : $9 \times (3^{3n} - 1) \equiv 9 \times 0 [13]$ وبالتالي : $3^2 \times 3^{3n} - 9 \times 1 \equiv 0 [13]$.
نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+2} - 9 \equiv 0 [13]$.

3 تعيين ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 :
 $3^0 \equiv 1 [13]$ ، $3^1 \equiv 3 [13]$ ، $3^2 \equiv 9 [13]$ ، $3^3 \equiv 1 [13]$. نستنتج أن بواقي
 قسمة 3^n على 13 دورية ودورها 3 ، نلخصها في الجدول الآتي :

	$3k + 2$	$3k + 1$	$3k$	n
في هذا الجدول k عدد طبيعي	9	3	1	البواقي

• استنتاج باقي قسمة 2005^{2010} على 13 :
 لدينا : $2005 = 13 \times 154 + 3$ ومنه : $2005 \equiv 3 [13]$.
 وبالتالي : $2005^{2010} \equiv 3^{2010} [13]$ ، لكن : $2010 = 3 \times 670$ أي أن العدد
 2010 من الشكل $3k$ ، نستنتج أن $2005^{2010} \equiv 1 [13]$.
إذن : باقي قسمة 2005^{2010} على 13 هو 1 .
 4 - أ- تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 وذلك من أجل $p = 3n$:

لدينا : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$ ومنه : $A_{3n+1} = 3^{3n+1} + 3^{2(3n+1)} + 3^{3(3n+1)}$

وبالتالي : $A_{3n} = 3^{3n} + [3^{3n}]^2 + [3^{3n}]^3$

وعليه : $A_{3n} \equiv 1 + 1^2 + 1^3 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{13}$ أي : $A_{3n} \equiv 3 \pmod{13}$.

إذن : إذا كان $p = 3n$ فإن باقي قسمة A_p على 13 هو 3 .

ب- البرهان أنه إذا كان $p = 3n + 1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 :

لدينا : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$ ومنه : $A_{3n+1} = 3^{3n+1} + 3^{2(3n+1)} + 3^{3(3n+1)}$

وبالتالي : $A_{3n+1} = 3^{3n+1} + [3^{(3n+1)}]^2 + [3^{(3n+1)}]^3$

وعليه : $A_{3n+1} \equiv 3 + 3^2 + 3^3 \equiv 3 + 9 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$ أي : $A_{3n+1} \equiv 0 \pmod{13}$.

إذن : إذا كان $p = 3n + 2$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

ج- تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p = 3n + 2$:

لدينا : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$ ومنه : $A_{3n+2} = 3^{3n+2} + 3^{2(3n+2)} + 3^{3(3n+2)}$

وبالتالي : $A_{3n+2} = 3^{3n+2} + [3^{(3n+2)}]^2 + [3^{(3n+2)}]^3$

وعليه : $A_{3n+2} \equiv 9 + 9^2 + 9^3 \equiv 9 + 3 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$ أي : $A_{3n+2} \equiv 0 \pmod{13}$.

إذن : إذا كان $p = 3n + 2$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

5 أ- التحقق أن العدد a يكتب على الشكل A_p في النظام العشري :

تذكير : القول أن عدد طبيعي N يكتب $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ في النظام ذي الأساس x يعني :

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = a_n \times x^n + a_{n-1} \times x^{n-1} + \dots + a_2 \times x^2 + a_1 \times x + a_0$$

$a = \overline{1001001000}$ وعليه :

$$= 0 + 0 \times 3^1 + 0 \times 3^2 + 1 \times 3^3 + 0 \times 3^4 + 0 \times 3^5 + 1 \times 3^6 + 0 \times 3^7 + 0 \times 3^8 + 1 \times 3^9$$

$$= 1 \times 3^3 + 1 \times 3^6 + 1 \times 3^9 = 3^3 + 3^6 + 3^9 = 3^3 + 3^{2 \times 3} + 3^{3 \times 3} = A_3$$

إذن : $a = A_3$.

• التحقق أن العدد b يكتب على الشكل A_p في النظام العشري :

$$b = \overline{100010001000}$$

$$\begin{aligned} &= 0 + 0 \times 3^1 + 0 \times 3^2 + 0 \times 3^3 + 1 \times 3^4 + 0 \times 3^5 + 0 \times 3^6 + 0 \times 3^7 + 1 \times 3^8 + 0 \times 3^9 \\ &\quad + 0 \times 3^{10} + 0 \times 3^{11} + 1 \times 3^{12} \\ &= 1 \times 3^4 + 1 \times 3^8 + 1 \times 3^{12} = 3^4 + 3^8 + 3^{12} = 3^4 + 3^{2 \times 4} + 3^{3 \times 4} = A_4 \\ &\text{إذن : } b = A_4 . \end{aligned}$$

ب- استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13 :
من السؤال (4) حصلنا على النتائج الآتية :

- إذا كان $p = 3n$ فإن باقي قسمة A_p على 13 هو 3 .

- إذا كان $p = 3n + 1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

- إذا كان $p = 3n + 2$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

وبالتالي : إذا كان p من مضاعفات العدد 3 فإن باقي قسمة A_p على 13 هو 3 ،

وإذا كان p ليس من مضاعفات العدد 3 فإن باقي قسمة A_p هو 0 .

نستنتج أن : $b = A_4 \equiv 0 [13]$ و $a = A_3 \equiv 3 [13]$.

التمرين الثاني :

1 أ- تعليم النقط A ، B و I : انظر الشكل .

ب- كتابة العدد Z على الشكل الجبري :

$$Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = \frac{1 - 2i - 1 + 4i}{1 - 2i + 1 + 2i} = \frac{2i}{2} = i$$

ج- طبيعة المثلث IAB :

$$\text{لدينا : } \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = i \text{ ونعلم أن : } |i| = 1 \text{ و } \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{وبالتالي : } |i| = 1 \text{ و } \left| \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} \right| = |i| = 1 \text{ و } \arg\left(\frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}\right) \equiv \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{ومنه : } \frac{AI}{BI} = 1 \text{ (أي : } AI = BI \text{) و } (\overrightarrow{BI}; \overrightarrow{AI}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

إذن : المثلث IAB قائم في النقطة I ومتساوي الساقين .

د- حساب اللاحقة z_C للنقطة C :

تذكير : الكتابة المركبة للتحاكي الذي مركزه $M_0(z_0)$ ونسبته k والذي يرفق بكل

نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = k(z - z_0)$

ومنه : $z_C - z_A = 2(z_I - z_A)$ وبالتالي : $z_C = 2(z_I - z_A) + z_A = 1$

ه- حساب اللاحقة z_D للنقطة D :

لدينا : D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$ وبالتالي فإن

$$z_D = \frac{z_A - z_B + z_C}{1 - 1 + 1} = 3 - 2i$$

و- تبيان أن $ABCD$ مربع :

لدينا : $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} = 1 - 2i = z_I$ وبالتالي فإن النقطة I هي

منتصف كل من $[AC]$ و $[BD]$. نستنتج أن قطري الرباعي $ABCD$ متناصفان .

ومن السؤال (1 - ج) وجدنا أن المثلث IAB قائم في النقطة I ومتساوي الساقين .

نستنتج من هذا أن قطري الرباعي $ABCD$ متعامدان ومتقايسان .

إذن : الرباعي $ABCD$ مربع (القطران متناصفان ومتعامدان ومتقايسان) .

2) تعيين وإنشاء المجموعة (Γ_1) :

$$(1) \dots \|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{MA} + \vec{MC}\| \text{ يكافئ } M \in (\Gamma_1)$$

$$\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = (1 - 1 + 1)\vec{MD} = \vec{MD} \text{ لدينا :}$$

$$\vec{MA} + \vec{MC} = 2\vec{MI} \text{ (النقطة } I \text{ هي منتصف القطعة } [AC] \text{)}$$

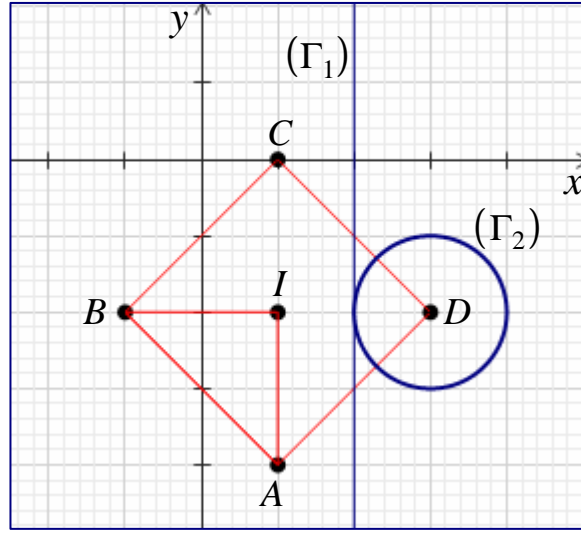
تكتب عندئذ المساواة (1) كما يلي : $MD = MI$

إذن : المجموعة (Γ_1) هي محور القطعة $[DI]$.

3) تعيين وإنشاء المجموعة (Γ_2) :

$$MD = 1 \text{ ومنه : } \|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 1 \text{ يكافئ } M \in (\Gamma_2)$$

إذن : المجموعة (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها النقطة D ونصف قطرها 1 .



التمرين الثالث :

- 1 تبيان أن (P) هو المستوي الذي معادلته $3x - y + 2z - 4 = 0$:
 لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء .
 لدينا : $\vec{AM}(x+1; y-2; z-1)$ و $\vec{BM}(x-2; y-1; z-3)$
 $M \in (P)$ يكافئ $AM = BM$ ومنه : $AM^2 = BM^2$ وبالتالي :
 $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2$
 وبعد التبسيط نحصل على المعادلة $3x - y + 2z - 4 = 0$.
إذن : (P) هو المستوي الذي معادلته $3x - y + 2z - 4 = 0$.
طريقة أخرى : من المساواة $AM = BM$ نستنتج أن المجموعة (P) هي
 المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.
 كتابة معادلة للمستوي (P) :
 لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ وبالتالي فإن إحداثيات النقطة I هي $(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2)$
 ولتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء .
 $M \in (P)$ يكافئ $\vec{AB} \perp \vec{IM}$ ومنه : $\vec{AB} \cdot \vec{IM} = 0$
 لدينا : $\vec{AB}(3; -1; 2)$ و $\vec{IM}(x - \frac{1}{2}; y - \frac{3}{2}; z - 2)$

من المساواة $\vec{AB} \cdot \vec{IM} = 0$ نجد : $3\left(x - \frac{1}{2}\right) + (-1)\left(y - \frac{3}{2}\right) + 2(z - 2) = 0$

وبعد التبسيط نحصل على المعادلة : $3x - y + 2z - 4 = 0$.

إذن : (P) هو المستوي الذي معادلته $3x - y + 2z - 4 = 0$.

2 تعيين معادلة للمستوي (Q) :

بما أن المستوي (Q) يوازي المستوي (P) فإن $\vec{n}(3; -1; 2)$ شعاع ناظمي

لكل من (P) و (Q) . وبالتالي فإن معادلة للمستوي (Q) من الشكل :

$$3x - y + 2z + d = 0$$

وبما أن $A \in (Q)$ فإن $3 \times (-1) - 2 + 2 \times 1 + d = 0$ ومنه : $d = 3$

إذن : معادلة للمستوي (Q) هي $3x - y + 2z + 3 = 0$.

طريقة أخرى : لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء .

إذا كان \vec{n} شعاعا ناظما للمستوي (P) فإن $\vec{n}(3; -1; 2)$.

لدينا : $M \in (Q)$ يكافئ $\vec{n} \perp \vec{AM}$ ومنه : $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$

وبالتالي : $3 \times (x + 1) - 1 \times (y - 2) + 2 \times (z - 1) = 0$ أي $3x - y + 2z + 3 = 0$

إذن : معادلة للمستوي (Q) هي $3x - y + 2z + 3 = 0$.

3 أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) الذي يشمل C ويعامد (P) :

(D) يشمل C ويعامد (P) معناه : (D) يشمل C و \vec{n} شعاع توجيه له .

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء .

تكون $M(x; y; z)$ نقطة من (D) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -t - 1 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t + 2 \end{cases} \quad \vec{CM} = t \vec{n} \quad \text{ومنه التمثيل الوسيطي التالي :}$$

ب- تعيين إحداثيات E نقطة تقاطع (D) و (Q) :

للبحث عن إحداثيات E نقطة تقاطع (D) و (Q) ، نقوم بحل الجملة الآتية :

$$t = -\frac{4}{7} \quad \text{، وبحل هذه الجملة نجد :} \quad \begin{cases} x = 3t \\ y = -t - 1 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t + 2 \\ 3x - y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

ومنه : $E\left(-\frac{12}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right)$

جـ- حساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) :

لدينا : $A(-1; 2; 1)$ و $E\left(-\frac{12}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right)$ ومنه : $\vec{AE}\left(-\frac{5}{7}; -\frac{17}{7}; -\frac{1}{7}\right)$

ومنه : $\vec{AE} \cdot \vec{n} = -\frac{5}{7} \times 3 - \frac{17}{7} \times (-1) - \frac{1}{7} \times 2 = 0$ وهذا يعني أن $\vec{AE} \perp \vec{n}$

نستنتج أن النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) .

وبالتالي فإن المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي AE .

تذكير : إذا كان $A(x_A; y_A; z_A)$ و $B(x_B; y_B; z_B)$ فإن

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

لدينا : $\vec{AE}\left(-\frac{5}{7}; -\frac{17}{7}; -\frac{1}{7}\right)$ ومنه : $AE = \|\vec{AE}\| = \sqrt{\frac{315}{49}} = \frac{3\sqrt{35}}{7}$

إذن : المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي $\frac{3\sqrt{35}}{7}$.

طريقة أخرى : لتكن $M(x; y; z)$ نقطة كيفية من المستقيم (D) .

● حساب AM^2 :

لدينا : $\vec{AM}(3t+1; -t-3; 2t+1)$

ومنه : $AM^2 = (3t+1)^2 + (-t-3)^2 + (2t+1)^2 = 14t^2 + 16t + 11$

● استنتاج المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) :

المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي أقصر مسافة بين A و (D) .

لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(t) = \sqrt{14t^2 + 16t + 11}$

* دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و $f'(t) = \frac{28t+16}{2\sqrt{14t^2+16t+11}}$

($f'(t) = 0$) يكافئ ($28t+16=0$) ومنه : $t = -\frac{4}{7}$

الدالة f متناقصة على $]-\infty; -\frac{4}{7}[$ و متزايدة على $]-\frac{4}{7}; +\infty[$ وتقبل قيمة

صغرى من أجل $t = -\frac{4}{7}$. عندئذ تكون المسافة AM صغرى (أصغر ما يمكن)

$$f\left(-\frac{4}{7}\right) = \sqrt{14\left(-\frac{4}{7}\right)^2 + 16\left(-\frac{4}{7}\right) + 11} = \frac{3\sqrt{35}}{7} \text{ ومنه :}$$

إذن : المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي $\frac{3\sqrt{35}}{7}$.

4) تعيين تمثيل وسيطي للمستوي (π) :

المستوي (π) يحوي المستقيم (AC) ويعامد المستوي (P) ، نستنتج أن المستوي (π) يشمل النقطة A و \vec{AC} ، \vec{n} هما شعاعا توجيه له .
تكون نقطة $M(x; y; z)$ من (π) إذا فقط إذا وجد عدنان حقيقيان t و t' بحيث $\vec{AM} = t\vec{n} + t'\vec{AC}$. ومنه التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x = 3t + t' - 1 \\ y = -t - 3t' + 2 \quad (t \in \mathbb{R} ; t' \in \mathbb{R}) \\ z = 2t + t' + 1 \end{cases}$$

● استنتاج معادلة للمستوي (π) :

$$\begin{cases} t' = x - 3t + 1 \\ y = -t - 3(x - 3t + 1) + 2 \\ z = 2t + (x - 3t + 1) + 1 \end{cases} \text{ لدينا : } \begin{cases} x = 3t + t' - 1 \\ y = -t - 3t' + 2 \\ z = 2t + t' + 1 \end{cases} \text{ ومنه :} \\ \begin{cases} t' = x - 3t + 1 \\ t = -z + x + 1 \\ y = 8(-z + x + 2) - 3x - 1 \end{cases} \text{ وبالتالي :} \begin{cases} t' = x - 3t + 1 \\ y = 8t - 3x - 1 \\ z = -t + x + 2 \end{cases} \text{ وعليه :}$$

أخيرا نحصل على المعادلة : $5x - y - 8z + 15 = 0$.
إذن : معادلة للمستوي (π) هي $5x - y - 8z + 15 = 0$.

التمرين الرابع :

1) حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$:

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1$ ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

هندسيا : محور الترتيب هو مستقيم مقارب للمنحني (C_g) .

2) أ- تبيان أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$:

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2 \ln x}{x} \right)$ ، ونعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ وبالتالي : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

ب- دراسة تغيّرات الدالة g :

$$g'(x) = \frac{x-2}{x} \text{ ، من أجل كل } x \text{ من }]0; +\infty[$$

الدالة g متزايدة تماما على $[2; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0; 2]$.

● جدول تغيّرات الدالة g :

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$1 - 2 \ln 2$	$+\infty$

$g(2) = 1 - 2 \ln 2$

ج- حساب $g(1)$: $g(1) = 0$

د- البرهان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α :

● لدينا : $g(1) = 0$ وبالتالي فإن الحل الأول هو 1 .

● من جدول تغيّرات الدالة g نلاحظ أنها مستمرة و متزايدة تماما على $[3.5; 3.6]$

زيادة على ذلك : $g(3.5) \approx -0.005$ و $g(2.83) \approx 0.038$

وبالتالي : $g(3.5) \times g(3.6) < 0$ ، نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $3.5 < \alpha < 3.6$.

ه- استنتاج إشارة $g(x)$:

● $g(x) = 0$ يكافئ $x \in \{1; \alpha\}$

● $g(x) < 0$ يكافئ $x \in]1; \alpha[$

● $g(x) > 0$ يكافئ $x \in]0; 1[\cup]\alpha; +\infty[$

x	0	1	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	+

● استنتاج إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$:

لدينا : $x \in \{1; \alpha\}$ يكافئ $g(x)=0$
 وبالتالي فإن : $g\left(\frac{1}{x}\right)=0$ يكافئ $\frac{1}{x} \in \{1; \alpha\}$ ومنه : $x \in \left\{ \frac{1}{\alpha}; 1 \right\}$
 ولدينا : $x \in]1; \alpha[$ يكافئ $g(x)<0$
 وبالتالي فإن : $g\left(\frac{1}{x}\right)<0$ يكافئ $\frac{1}{x} \in]1; \alpha[$ ومنه : $x \in \left] \frac{1}{\alpha}; 1 \right[$
 وعليه فإن : $g\left(\frac{1}{x}\right)>0$ يكافئ $x \in \left] 0; \frac{1}{\alpha} \right[\cup]1; +\infty[$

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1	$+\infty$
$g\left(\frac{1}{x}\right)$		0	-	+

3 أ- حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x + 1 + x \ln x)$$

ونعلم أن : $\lim_{x \rightarrow 0} (-x + 1) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

● التفسير الهندسي لـ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$:

المنحني (C_f) يقبل عند النقطة O نصف مماس على اليمين يوازي المنصف الأول

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(-1 + \frac{1}{x} + \ln x \right) = +\infty \quad \text{ب- حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

ج- تبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن $f'(x) = x g\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = -2x + 1 + 2x \ln x + \frac{1}{x} \times x^2 \quad \text{من أجل كل } x \text{ من }]0; +\infty[$$

$$= -x + 1 + 2x \ln x = x \left(-1 + \frac{1}{x} + 2 \ln x \right)$$

$$= x \left(\frac{1}{x} - 1 - 2 \ln \frac{1}{x} \right) = x g\left(\frac{1}{x}\right)$$

● استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على

$\left[\frac{1}{\alpha}; 1\right]$ و متزايدة تماما على كل من المجالين $\left[0; \frac{1}{\alpha}\right]$ و $[1; +\infty[$.

د- جدول تغيّرات الدالة f :

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	0	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	0	$+\infty$	

• تبيان أن $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$:

لدينا : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right) + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)$... (1)

ولدينا : $g(\alpha) = 0$ أي $\alpha - 1 - 2\ln\alpha = 0$ ومنه : $\alpha - 1 + 2\ln\frac{1}{\alpha} = 0$

وبالتالي : $\ln\frac{1}{\alpha} = \frac{1-\alpha}{2}$ وبالتعويض في المساواة (1) ينتج :

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right) + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \times \frac{1-\alpha}{2} = \frac{-2 + 2\alpha + 1 - \alpha}{2\alpha^2} = \frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$$

إذن : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$

• استنتاج حصر للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$:

لدينا : $3.5 < \alpha < 3.6$ ومنه : $2.5 < \alpha - 1 < 2.6$... (1)

ولدينا : $3.5 < \alpha < 3.6$ ومنه : $(3.5)^2 < \alpha^2 < (3.6)^2$

وبالتالي : $24.5 < 2\alpha^2 < 25.92$ و عليه : $0.038 < \frac{1}{2\alpha^2} < 0.041$... (2)

من (1) و (2) وبالضرب طرفا في طرف ينتج :

$$2.5 \times 0.038 < \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2} < 2.6 \times 0.041 \text{ وبالتالي :}$$

$$0.095 < f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < 0.106 \text{ أي } 0.095 < \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2} < 0.106$$

$$\text{إنن : } 0.095 < f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < 0.106$$

4 رسم المنحني (C_f) على المجال $[0;3]$:

