حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1 أ- تبيان أنه إذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7 :

تذكير بمبرهنة غوص : a ، b و c أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا قسم العدد a الجداء $b\times c$ وكان a أوليا مع b فإن a يقسم c .

لدينا : $7x+65y=2009$ ومنه : $65y=2009-7x$

وبالتالي : $65y=7(287-x)$ ، نستنتج أن 7 يقسم $65y$ وبما أن 7 أولي مع 65 وحسب غوص فإن 7 يقسم y وهذا يعني أن y مضاعف للعدد 7 .

إذن : إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7 .

ب- حل المعادلة (1) :

y مضاعف للعدد 7 معناه : يوجد عدد صحيح k بحيث $y=7k$ وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على : $x=287-65k$.

إذن : حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $\begin{cases} x=-65k+287 \\ y=7k \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$

2 دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9 :

$2^0\equiv1[9]$ ، $2^1\equiv2[9]$ ، $2^2\equiv4[9]$ ، $2^3\equiv8[9]$ ، $2^4\equiv7[9]$ ، $2^5\equiv5[9]$ ، $2^6\equiv1[9]$. نستنتج أن بواقي قسمة 2^n على 9 دورية ودورها 6 نلخصها في الجدول الآتي : (في هذا الجدول k عدد طبيعي)

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$2^n\equiv$	1	2	4	8	7	5

3 تعيين قيم n بحيث يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9 :

من السؤال 2 نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{6n}\equiv1[9]$

تكتب عندئذ العلاقة : $2^{6n}+3n+2\equiv0[9]$ كما يلي : $1+3n+2\equiv0[9]$

ومنه : $3n\equiv6[9]$ ، وعليه : $n\equiv2[3]$ وبالتالي : $n=3\alpha+2$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$

إذن : يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9 من أجل $n=3\alpha+2$ ، $\alpha\in\mathbb{N}$

4 أ- التحقق أن u_n يقبل القسمة على 9 :

من السؤال 2 نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{6n}\equiv1[9]$

ومنه : $2^{6n}-1\equiv 0[9]$ أي : $u_n\equiv 0[9]$.

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n يقبل القسمة على 9 .

ب- حل المعادلة (2) :

لدينا : $u_1=2^6-1=63$ و $u_2=2^{12}-1=4095$

تكتب عندئذ المعادلة (2) كما يلي : $7\times 63\,x+4095\,y=126567$

وبقسمة الطرفين على 63 نحصل على المعادلة : $7x+65\,y=2009$ أي أن المعادلة (2) تكافئ المعادلة (1) . نستنتج أن لهما نفس مجموعة الحلول .

إذن : حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x\,;y)$ حيث : $\begin{cases} x=-65k+287 \\ y=7k \end{cases}\ (k\in\mathbb{Z})$

جـ- تعيين الثنائية $(x\,;y)$ حل (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع $y_0\geq 25$:

لدينا : $x_0\geq 0$ و $y_0\geq 25$ ومنه : $-65k+287\geq 0$ و $7k\geq 25$

وبالتالي : $k\leq 4.41$ و $k\geq 3.57$ نستنتج أن $k=4$.

إذن : $(x\,;y)=(27\,;28)$.

التمرين الثاني : (4.5 نقطة)

1 تبيان أن النقط A ، B و C ليست في استقامية :

تذكير : • النقط A ، B و C ليست في استقامية معناه : الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا .

• $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا يعني وجود عدد حقيقي t حيث : $\overrightarrow{AC}=t\,\overrightarrow{AB}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2\,;1;\,0)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\,;0\,;2)$ وبالتالي فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا (لا يوجد عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{AC}=t\,\overrightarrow{AB}$) .

إذن : النقط A ، B و C ليست في استقامية .

2 إيجاد معادلة للمستوي (ABC) :

بما أن النقط A ، B و C ليست في استقامية ، فإنها تعيّن مستويا (ABC) .

إذا كان $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) فإن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\vec{n} \\ \overrightarrow{AC}\perp\vec{n} \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n}=0 \\ \overrightarrow{AC}.\vec{n}=0 \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} -2a+b=0 \\ -2a+2c=0 \end{cases}$ وبحل هذه الجملة مع

فرض $c=1$ نجد : $\vec{n}(1;2;1)$.

تكون عندئذ معادلة للمستوي (ABC) من الشكل $x+2y+z+d=0$

ولدينا : $A\in(ABC)$ ومنه : $2+2\times0+0+d=0$ ينتج : $d=-2$

إذن : معادلة للمستوي (ABC) هي $\boxed{x+2y+z-2=0}$

③ إيجاد تمثيل وسيطي للمستقيم (BC) :

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (BC) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث :

$\overrightarrow{BM}=t\,\overrightarrow{BC}$. لدينا : $\overrightarrow{BC}(0;-1;2)$ ومنه التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-t \\ z=2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

④ أ- تبيان أن المستويين (P) و (ABC) متقاطعان :

$\vec{u}(2;2;1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n}(1;2;1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{n}$ غير مرتبطين خطيا (لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\vec{u}=k\vec{n}$)

نستنتج أن المستويين (P) و (ABC) متقاطعان .

ب- تبيان أن المستوي (P) يشمل النقطتين B و C :

المستوي (P) يشمل النقطتين B و C إذا وفقط إذا كانت إحداثيات كل من B و C

تحقق المعادلة $2x+2y+z-2=0$.

لدينا : $2\times0+2\times1+0-2=2-2=0$ ومنه : $B\in(P)$

ولدينا : $2\times0+2\times0+2-2=2-2=0$ ومنه : $C\in(P)$

إذن : المستوي (P) يشمل النقطتين B و C .

• الاستنتاج : المستقيم (BC) هو مستقيم تقاطع المستويين (P) و (ABC) .

⑤ تعيين المجموعة (E) :

$M\in(E)$ يكافئ $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$

لتكن G مركز ثقل المثلث ABC ومنه : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

ولدينا : $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})$

$$=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=-\overrightarrow{AD}$$

حيث $ABDC$ متوازي أضلاع) إحداثيات النقطة D هي $(-2;1;2)$) .

ومنه : $M \in (E)$ يكافئ $\|3\overrightarrow{MG}\| = \|-\overrightarrow{AD}\|$ وبالتالي : $GM = \frac{1}{3}AD$

إذن : (E) هي سطح الكرة التي مركزها النقطة $G\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ ونصف قطرها

$\frac{1}{3}AD = AG = \frac{\sqrt{21}}{3}$ (يمكن تعيين المجموعة (E) تحليليا أي بمعادلة) .

التمرين الثالث : (4.5 نقطة)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)...\ z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = 0$

1 أ- التحقق أن 3 حل للمعادلة (E) :

لدينا : $3^3 - 3\times 3^2 + 3\times 3 - 9 = 36 - 36 = 0$ ومنه : 3 حل للمعادلة (E) .

- تعيين a ، b و c : $z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = (z-3)(az^2 + bz + c)$

من أجل كل z من $\mathbb{C}$:

$$(z-3)(az^2+bz+c) = \cdots = az^3 + (b-3)z^2 + (c-3b)z - 3c$$

ومنه : $az^3 + (b-3)z^2 + (c-3b)z - 3c = z^3 - 3z^2 + 3z - 9$

نستنتج أن : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 3 = -3 \\ c - 3b = 3 \\ -3c = -9 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}$

إذن : من أجل كل z من $\mathbb{C}$ ، $(z-3)(z^2+3) = 0$

ب- حل المعادلة (E) :

لدينا : $z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = 0$ يكافئ $(z-3)(z^2+3) = 0$

ومنه : $z - 3 = 0$ أو $z^2 + 3 = 0$

وبالتالي : $z = 3$ أو $z^2 = -3 = 3i^2 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$

إذن : للمعادلة (E) ثلاثة حلول هي $z_1 = 3$ ، $z_2 = i\sqrt{3}$ و $z_3 = -i\sqrt{3}$.

2 تبيان أن المثلث ABC متقايس الأضلاع :

لدينا : $AB = |z_B - z_A| = \left|i\sqrt{3} - 3\right| = 2\sqrt{3}$

$$AC = |z_C - z_A| = \left|-i\sqrt{3} - 3\right| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left|-2i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$$

ومنه : $AB = AC = BC$. إذن : المثلث ABC متقايس الأضلاع .

3 تعيين z_E لاحقة النقطة E :

تذكير : الكتابة المركبة للدوران الذي مركزه $M_0(z_0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $\boxed{z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)}$

وعليه فإن الكتابة المركبة لهذا الدوران هي : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$

ومنه : $z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}z_D = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$

4 أ- حساب $\frac{z_F}{z_E}$:

$$\frac{z_F}{z_E} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i} \times \frac{-\sqrt{3} + i}{-\sqrt{3} + i} = i$$

● استنتاج أن المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان :

تذكير بالتفسير الهندسي لـ $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)$:

إذا كانت A ، B و M صور الأعداد المركبة z_A ، z_B و z على الترتيب حيث $z \neq z_B$ فإن : $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BM} ; \overrightarrow{AM}\right)[2\pi]$

نعلم أن : $\left(\overrightarrow{OE} ; \overrightarrow{OF}\right) \equiv \arg\frac{z_F}{z_E}[2\pi]$ و $\arg\frac{z_F}{z_E} = \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

ومنه : $\left(\overrightarrow{OE} ; \overrightarrow{OF}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ نستنتج أن $(OE) \perp (OF)$.

ب- تعيين z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا :

لدينا : $z_E = -\sqrt{3} - i$ و $z_F = 1 - i\sqrt{3}$.

ونعلم أن : $(OE) \perp (OF)$ ، ومن جهة أخرى : $OE = OF = 2$

وبالتالي فإن المثلث OEF قائم في النقطة O ومتساوي الساقين ، نستنتج أن النقطة G هي نظيرة النقطة O بالنسبة إلى I منتصف القطعة $[EF]$.

لدينا : $z_I = \frac{z_E + z_F}{2} = \frac{z_O + z_G}{2}$

ومنه : $z_G = (z_E + z_F) = 1 - \sqrt{3} - i\left(\sqrt{3} + 1\right)$

التمرين الرابع :

الجزء I :

① دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات :

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}(3-x)e^{x}=-\infty$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

و لدينا : $\lim_{x\to-\infty}(3-x)e^{x}=\lim_{x\to-\infty}3e^{x}-\lim_{x\to-\infty}xe^{x}=0$

(لأن $\lim_{x\to-\infty}xe^{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0$) ومنه : $\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$.

- اتجاه التغيّر :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=(3-x)'\times e^{x}+(e^{x})'\times(3-x)=(2-x)e^{x}$

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $2-x$ ، نستنتج أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty\,;2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[2\,;+\infty[$.

- جدول التغيّرات :

$g(2)=e^{2}-3$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$e^{2}-3$	$\searrow$	$-\infty$

② تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α :

لدينا : $g(0)=(3-0)e^{0}-3=3-3=0$ ومنه 0 حل للمعادلة $g(x)=0$.

تذكير بمبرهنة القيم المتوسطة . إذا كان :

❶ g مستمرة على المجال $[a\,;b]$ ؛

❷ g رتيبة تماما على المجال $[a\,;b]$ ؛

❸ $g(a)\times g(b)<0$.

فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]a;b[$.

من جدول تغيرات g نلاحظ أنها مستمرة ومتناقصة تماما على $[2.82\,;2.83]$

زيادة على ذلك : $g(2.82)\approx 0.06$ و $g(2.83)\approx -0.08$

وبالتالي : $g(2.82)\times g(2.83)<0$

نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2.82<\alpha<2.83$.

إذن : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha\in\left]2.82;2.83\right[$.

③ استنتاج إشارة $g(x)$:

- $g(x)=0$ يكافئ $x\in\{0;\alpha\}$
- $g(x)<0$ يكافئ $x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]\alpha;+\infty\right[$
- $g(x)>0$ يكافئ $x\in\left]0;\alpha\right[$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الجزء II :

① أ- تبيان أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$:

تذكير : القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه عندما يؤول x إلى a ، فإن نسبة تزايد f بين العددين a و x تؤول إلى عدد حقيقي L ، أي :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$$

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{e^x-1}=$

ونعلم أن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ وبالتالي :

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}\times x=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}\times x=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{x}{e^x-1}}\times x=1\times0=0$$

إذن : الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ وعددها المشتق عند 0 هو $f'(0)=0$

ب- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند المبدأ O:

تذكير: معادلة مماس المنحنى الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي :

$$y=f'(a).(x-a)+f(a)$$

لدينا : $f(0)=0$ و $f'(0)=0$ وبالتالي فإن معادلة المماس (T) هي $y=0$

② أ- تبيان أن $\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=0$:

تذكير : $\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}=0$ وَ $\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u^n}=+\infty$ (n عدد طبيعي) .

ومنه : $\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x^3}\right)}=0$.

إذن : $\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=0$.

● حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=0$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

● حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

نعلم أن : $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ومنه : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

ب- تبيان أنه من أجل $x\neq 0$ فإن $f'(x)=\frac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$:

تذكير : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

من أجل $x\neq 0$:

$$f'(x)=\frac{(x^3)'(e^x-1)-(e^x-1)'\times x^3}{(e^x-1)^2}=\frac{3x^2(e^x-1)-x^3e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2[(3-x)e^x-3]}{(e^x-1)^2}=\frac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$$

جـ- التحقق أن $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$:

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي : $(3-\alpha)e^{\alpha}-3$ ومنه : $e^{\alpha}=\dfrac{3}{3-\alpha}$ وبالتالي :

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3}{e^{\alpha}-1}=\frac{\alpha^3}{\frac{3}{3-\alpha}-1}=\frac{\alpha^3}{\frac{\alpha}{3-\alpha}}=\alpha^3\times\frac{3-\alpha}{\alpha}=\alpha^2(3-\alpha)$$

إذن : $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$.

- تعيين حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $2.82<\alpha<2.83$ ومنه : $-2.83<-\alpha<-2.82$ (الضرب في -1)

وبإضافة العدد 3 لجميع الحدود ينتج : $3-2.83<3-\alpha<3-2.82$

وبالتالي : $0.17<3-\alpha<0.18$ ... (1)

ومن : $2.82<\alpha<2.83$ نحصل على : $(2.82)^2<\alpha^2<(2.83)^2$

وبالتالي : $7.95<\alpha^2<8.01$ ... (2)

من (1) و (2) وبالضرب طرف في طرف ينتج : $1.35<\alpha^2(3-\alpha)<1.44$

إذن : $1.35<f(\alpha)<1.44$

د- جدول تغيّرات الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ ، وبالتالي فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3 أ- حساب $f(x)+x^3$:

من أجل $x\neq 0$: $f(x)+x^3=\dfrac{x^3}{e^x-1}+x^3=\dfrac{x^3e^x}{e^x-1}$

- استنتاج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $x\mapsto -x^3$:

إشارة الفرق $f(x)-(-x^3)$ أي : $f(x)+x^3$ هي إشارة الجداء $x(e^x-1)$
يمكن الاستعانة بجدول الإشارة للحصول على النتائج الآتية :

- إذا كان $x=0$ يكون $f(x)-(-x^3)=0$ ومنه (C) يقطع (C_f) في النقطة O
- إذا كان $x\neq 0$ يكون $f(x)-(-x^3)>0$ ومنه (C_f) يقع فوق (C) .

ب- تبيان أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x^3\right)=0$:

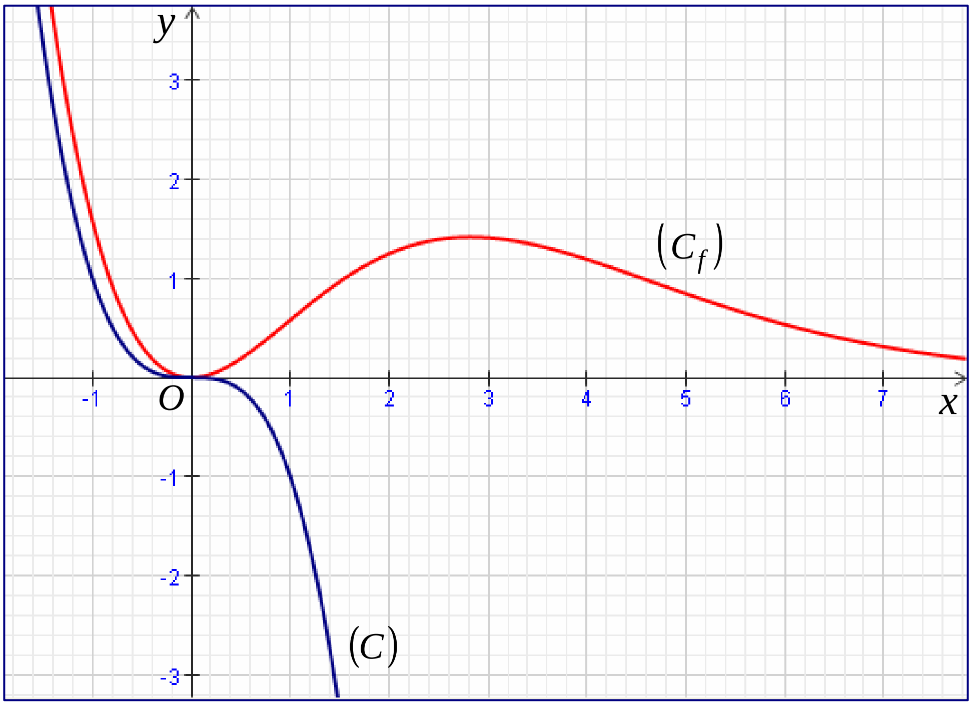
من أجل $x\neq 0$ ، لدينا : $f(x)+x^3=\dfrac{x^3}{e^x-1}+x^3=\dfrac{x^3e^x}{e^x-1}$

ونعلم أن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3e^x}{e^x-1}=0$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x^3\right)=0$.

- هندسيا : المنحني (C) هو منحني مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

4 رسم (C) و (C_f) :



حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

① البرهان أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n}-1\equiv 0[13]$:

لدينا : $3^{3n}=\left(3^3\right)^n=(27)^n$ ونعلم أن $27\equiv 1[13]$ ومنه : $(27)^n\equiv 1[13]$

وبالتالي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n}\equiv 1[13]$.

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n}-1\equiv 0[13]$.

② استنتاج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+1}-3\equiv 0[13]$:

من السؤال ① وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n}-1\equiv 0[13]$.

ومنه : $3\times\left(3^{3n}-1\right)\equiv 3\times 0[13]$ وبالتالي : $3\times 3^{3n}-3\times 1\equiv 0[13]$

نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+1}-3\equiv 0[13]$.

● استنتاج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+2}-9\equiv 0[13]$:

من السؤال ① وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n}-1\equiv 0[13]$

ومنه : $9\times\left(3^{3n}-1\right)\equiv 9\times 0[13]$ وبالتالي : $3^2\times 3^{3n}-9\times 1\equiv 0[13]$

نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{3n+2}-9\equiv 0[13]$.

③ تعيين ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 :

$3^0\equiv 1[13]$ ، $3^1\equiv 3[13]$ ، $3^2\equiv 9[13]$ ، $3^3\equiv 1[13]$. نستنتج أن بواقي قسمة 3^n على 13 دورية ودورها 3 ، نلخصها في الجدول الآتي :

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
البواقي	1	3	9

في هذا الجدول k عدد طبيعي

● استنتاج باقي قسمة 2005^{2010} على 13 :

لدينا : $2005=13\times 154+3$ ومنه : $2005\equiv 3[13]$

وبالتالي : $2005^{2010}\equiv 3^{2010}[13]$ ، لكن : $2010=3\times 670$ أي أن العدد 2010 من الشكل $3k$ ، نستنتج أن $2005^{2010}\equiv 1[13]$.

إذن : باقي قسمة 2005^{2010} على 13 هو 1 .

④ أ- تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 وذلك من أجل $p=3n$:

لدينا : $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$ ومنه : $A_{3n+1}=3^{3n1}+3^{2(3n)}+3^{3(3n)}$

وبالتالي : $A_{3n}=3^{3n}+\left[3^{3n}\right]^2+\left[3^{3n}\right]^3$

وعليه : $A_{3n}\equiv 1+1^2+1^3\equiv 1+1+1[13]$ أي : $A_{3n}\equiv 3[13]$.

إذن : إذا كان $p=3n$ فإن باقي قسمة A_p على 13 هو 3 .

ب- البرهان أنه إذا كان $p=3n+1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 :

لدينا : $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$ ومنه : $A_{3n+1}=3^{3n+1}+3^{2(3n+1)}+3^{3(3n+1)}$

وبالتالي : $A_{3n+1}=3^{3n+1}+\left[3^{(3n+1)}\right]^2+\left[3^{(3n+1)}\right]^3$

وعليه : $A_{3n+1}\equiv 3+3^2+3^3\equiv 3+9+1\equiv 0[13]$ أي : $A_{3n+1}\equiv 0[13]$

إذن : إذا كان $p=3n+2$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

جـ- تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p=3n+2$:

لدينا : $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$ ومنه : $A_{3n+2}=3^{3n+2}+3^{2(3n+2)}+3^{3(3n+2)}$

وبالتالي : $A_{3n+2}=3^{3n+2}+\left[3^{(3n+2)}\right]^2+\left[3^{(3n+2)}\right]^3$

وعليه : $A_{3n+2}\equiv 9+9^2+9^3\equiv 9+3+1[13]$ أي : $A_{3n+2}\equiv 0[13]$

إذن : إذا كان $p=3n+2$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

5 أ- التحقق أن العدد a يكتب على الشكل A_p في النظام العشري :

تذكير : القول أن عدد طبيعي N يكتب $\overline{a_n\,a_{n-1}\cdots a_2\,a_1\,a_0}$ في النظام ذي الأساس x يعني :

$$\mathrm{N}=\overline{a_n\,a_{n-1}\cdots a_2\,a_1\,a_0}=a_n\times x^n+a_{n-1}\times x^{n-1}+\cdots+a_2\times x^2+a_1\times x+a_0$$

وعليه :

$$a=\overline{1001001000}$$

$$=0+0\times 3^1+0\times 3^2+1\times 3^3+0\times 3^4+0\times 3^5+1\times 3^6+0\times 3^7+0\times 3^8+1\times 3^9$$

$$=1\times 3^3+1\times 3^6+1\times 3^9=3^3+3^6+3^9=3^3+3^{2\times 3}+3^{3\times 3}=A_3$$

إذن : $a=A_3$.

- التحقق أن العدد b يكتب على الشكل A_p في النظام العشري :

$b=\overline{1000100010000}$

$=0+0\times3^1+0\times3^2+0\times3^3+1\times3^4+0\times3^5+0\times3^6+0\times3^7+1\times3^8+0\times3^9$

$+\ 0\times3^{10}+0\times3^{11}+1\times3^{12}$

$=1\times3^4+1\times3^8+1\times3^{12}=3^4+3^8+3^{12}=3^4+3^{2\times4}+3^{3\times4}=A_4$

إذن : $b=A_4$.

ب- استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13 :

من السؤال 4 حصلنا على النتائج الآتية :

- إذا كان $p=3n$ فإن باقي قسمة A_p على 13 هو 3 .
- إذا كان $p=3n+1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .
- إذا كان $p=3n+2$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

وبالتالي : إذا كان p من مضاعفات العدد 3 فإن باقي قسمة A_p على 13 هو 3 ،
وإذا كان p ليس من مضاعفات العدد 3 فإن باقي قسمة A_p هو 0 .

نستنتج أن : $a=A_3\equiv3[13]$ وَ $b=A_4\equiv0[13]$.

التمرين الثاني :

1 أ- تعليم النقط A ، B و I : انظر الشكل .

ب- كتابة العدد Z على الشكل الجبري :

$$Z=\frac{z_I-z_A}{z_I-z_B}=\frac{1-2i-1+4i}{1-2i+1+2i}=\frac{2i}{2}=i$$

جـ- طبيعة المثلث IAB :

لدينا : $\frac{z_I-z_A}{z_I-z_B}=i$ ونعلم أن : $|i|=1$ وَ $\arg(i)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

وبالتالي : $\left|\frac{z_I-z_A}{z_I-z_B}\right|=|i|=1$ و $\arg\left(\frac{z_I-z_A}{z_I-z_B}\right)\equiv\arg(i)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

ومنه : $\frac{AI}{BI}=1$ (أي : $AI=BI$) و $(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{AI})\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

إذن : المثلث IAB قائم في النقطة I ومتساوي الساقين .

د- حساب اللاحقة z_C للنقطة C :

تذكير : الكتابة المركبة للتحاكي الذي مركزه $M_0(z_0)$ ونسبته k والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $\boxed{z'-z_0=k(z-z_0)}$

ومنه : $z_C - z_A=2(z_I-z_A)$ وبالتالي : $z_C=2(z_I-z_A)+z_A=1$

هـ- حساب اللاحقة z_D للنقطة D :

لدينا : D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$ وبالتالي فإن

$$z_D=\frac{z_A-z_B+z_C}{1-1+1}=3-2i$$

و- تبيان أن $ABCD$ مربع :

لدينا : $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}=1-2i=z_I$ وبالتالي فإن النقطة I هي منتصف كل من $[AC]$ و $[BD]$. نستنتج أن قطري الرباعي $ABCD$ متناصفان .

ومن السؤال (1 - جـ) وجدنا أن المثلث IAB قائم في النقطة I ومتساوي الساقين نستنتج من هذا أن قطري الرباعي $ABCD$ متعامدان ومتقايسان .

إذن : الرباعي $ABCD$ مربع (القطران متناصفان ومتعامدان ومتقايسان) .

2 تعيين وإنشاء المجموعة (Γ_1) :

$M\in(\Gamma_1)$ يكافئ $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|$ ... (1)

لدينا : $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(1-1+1)\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MD}$

ولدينا : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$ (النقطة I هي منتصف القطعة $[AC]$)

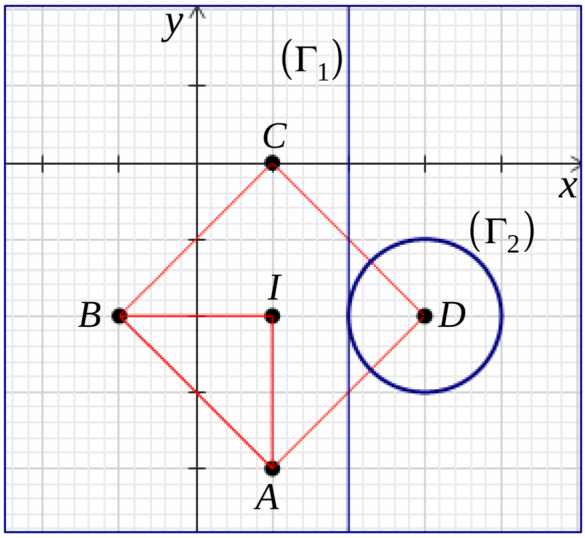
تكتب عندئذ المساواة (1) كما يلي : $MD=MI$

إذن : المجموعة (Γ_1) هي محور القطعة $[DI]$.

3 تعيين وإنشاء المجموعة (Γ_2) :

$M\in(\Gamma_2)$ يكافئ $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=1$ ومنه : $MD=1$

إذن : المجموعة (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها النقطة D ونصف قطرها 1 .



التمرين الثالث :

① تبيان أن (P) هو المستوي الذي معادلته $3x-y+2z-4=0$:

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء .

لدينا : $\overrightarrow{AM}(x+1;y-2;z-1)$ و $\overrightarrow{BM}(x-2;y-1;z-3)$

$M\in(P)$ يكافئ $AM=BM$ ومنه : $AM^2=BM^2$ وبالتالي :

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2$$

وبعد التبسيط نحصل على المعادلة $3x-y+2z-4=0$.

إذن : (P) هو المستوي الذي معادلته $3x-y+2z-4=0$.

طريقة أخرى : من المساواة $AM=BM$ نستنتج أن المجموعة (P) هي المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

كتابة معادلة للمستوي (P) :

لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ وبالتالي فإن إحداثيات النقطة I هي $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};2\right)$

ولتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء .

$M\in(P)$ يكافئ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{IM}$ ومنه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}=0$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;-1;2)$ و $\overrightarrow{IM}\left(x-\frac{1}{2};y-\frac{3}{2};z-2\right)$

من المساواة $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}=0$ نجد : $3\left(x-\frac{1}{2}\right)+(-1)\left(y-\frac{3}{2}\right)+2(z-2)=0$

وبعد التبسيط نحصل على المعادلة : $3x-y+2z-4=0$.

إذن : (P) هو المستوي الذي معادلته $3x-y+2z-4=0$.

2 تعيين معادلة للمستوي (Q) :

بما أن المستوي (Q) يوازي المستوي (P) فإن $\vec{n}(3;-1;2)$ شعاع ناظمي لكل من (P) و (Q) . وبالتالي فإن معادلة للمستوي (Q) من الشكل : $3x-y+2z+d=0$.

وبما أن $A\in(Q)$ فإن $3\times(-1)-2+2\times1+d=0$ ومنه : $d=3$

إذن : معادلة للمستوي (Q) هي $3x-y+2z+3=0$.

طريقة أخرى : لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء .

إذا كان $\vec{n}$ شعاعا ناظميا للمستوي (P) فإن $\vec{n}(3;-1;2)$.

لدينا : $M\in(Q)$ يكافئ $\vec{n}\perp\overrightarrow{AM}$ ومنه : $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

وبالتالي : $3\times(x+1)-1\times(y-2)+2\times(z-1)$ أي $3x-y+2z+3=0$

إذن : معادلة للمستوي (Q) هي $3x-y+2z+3=0$.

3 أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) الذي يشمل C ويعامد (P) :

(D) يشمل C ويعامد (P) معناه : (D) يشمل C و $\vec{n}$ شعاع توجيه له .

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء .

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (D) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث :

$\overrightarrow{CM}=t\,\vec{n}$. ومنه التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases}x=3t\\ y=-t-1\ (t\in\mathbb{R})\\ z=2t+2\end{cases}$

ب- تعيين إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D) :

للبحث عن إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D) ، نقوم بحل الجملة الآتية :

$\begin{cases}x=3t\\ y=-t-1\ (t\in\mathbb{R})\\ z=2t+2\\ 3x-y+2z+3=0\end{cases}$ ، وبحل هذه الجملة نجد : $t=-\frac{4}{7}$

ومنه : $E\left(-\frac{12}{7};-\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right)$

جـ- حساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) :

لدينا : $A(-1;2;1)$ و $E\left(-\frac{12}{7};-\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right)$ ومنه : $\overrightarrow{AE}\left(-\frac{5}{7};-\frac{17}{7};-\frac{1}{7}\right)$

ومنه : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{n}=-\frac{5}{7}\times3-\frac{17}{7}\times(-1)-\frac{1}{7}\times2=0$ وهذا يعني أن : $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{n}$

نستنتج أن النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) .

وبالتالي فإن المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي AE .

تذكير : إذا كان $A(x_A\,;y_A\,;z_A\,)$ و $B(x_B\,;y_B\,;z_B\,)$ فإن

$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A\,)^2+(y_B-y_A\,)^2+(z_B-z_A\,)^2}$$

لدينا : $\overrightarrow{AE}\left(-\frac{5}{7};-\frac{17}{7};-\frac{1}{7}\right)$ ومنه : $AE=\|\overrightarrow{AE}\|=\sqrt{\frac{315}{49}}=\frac{3\sqrt{35}}{7}$

إذن : المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي $\frac{3\sqrt{35}}{7}$.

طريقة أخرى : لتكن $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من المستقيم (D) .

- حساب AM^2 :

لدينا : $\overrightarrow{AM}(3t+1;-t-3;2t+1)$

ومنه : $AM^2=(3t+1)^2+(-t-3)^2+(2t+1)^2=14t^2+16t+11$

- استنتاج المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) :

المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي أقصر مسافة بين A و (D) .

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(t)=\sqrt{14t^2+16t+11}$

* دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(t)=\frac{28t+16}{2\sqrt{14t^2+16t+11}}$

$(f'(t)=0)$ يكافئ $(28t+16=0)$ ومنه : $t=-\frac{4}{7}$

الدالة f متناقصة على $]-\infty;-\frac{4}{7}]$ ومتزايدة على $[-\frac{4}{7};+\infty[$ وتقبل قيمة صغرى من أجل $t=-\frac{4}{7}$. عندئذ تكون المسافة AM صغرى (أصغر ما يمكن)

ومنه : $f\left(-\frac{4}{7}\right)=\sqrt{14\left(-\frac{4}{7}\right)^2+16\left(-\frac{4}{7}\right)+11}=\frac{3\sqrt{35}}{7}$

إذن : المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي $\frac{3\sqrt{35}}{7}$.

④ تعيين تمثيل وسيطي للمستوي (π) :

المستوي (π) يحوي المستقيم (AC) ويعامد المستوي (P) ، نستنتج أن المستوي (π) يشمل النقطة A و $\overrightarrow{AC}$ ، $\vec{n}$ هما شعاعا توجيه له .

تكون $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من (π) إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان t و t' بحيث $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{n}+t'\overrightarrow{AC}$. ومنه التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x=3t+t'-1 \\ y=-t-3t'+2 \\ z=2t+t'+1 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}\ ;\ t'\in\mathbb{R})$$

- استنتاج معادلة للمستوي (π) :

لدينا : $\begin{cases} x=3t+t'-1 \\ y=-t-3t'+2 \\ z=2t+t'+1 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} t'=x-3t+1 \\ y=-t-3(x-3t+1)+2 \\ z=2t+(x-3t+1)+1 \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} t'=x-3t+1 \\ y=8t-3x-1 \\ z=-t+x+2 \end{cases}$ وعليه : $\begin{cases} t'=x-3t+1 \\ t=-z+x+1 \\ y=8(-z+x+2)-3x-1 \end{cases}$

أخيرا نحصل على المعادلة : $5x-y-8z+15=0$.

إذن : معادلة للمستوي (π) هي $5x-y-8z+15=0$.

التمرين الرابع :

① حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)$:

لدينا : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(x-1)=-1$ ومنه : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=+\infty$

هندسيا : محور التراتيب هو مستقيم مقارب للمنحني (C_g) .

② أ- تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$:

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x}\right)$ ، ونعلم أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ وبالتالي : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

ب- دراسة تغيّرات الدالة g :

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{x-2}{x}$

الدالة g متزايدة تماما على $[2;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;2]$.

- جدول تغيّرات الدالة g :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(2)=1-2\ln 2$

جـ- حساب $g(1)$: $g(1)=0$

د- البرهان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α :

- لدينا : $g(1)=0$ وبالتالي فإن الحل الأول هو 1 .
- من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أنها مستمرة ومتزايدة تماما على $[3.5; 3.6]$

زيادة على ذلك : $g(3.5)\approx-0.005$ و $g(2.83)\approx 0.038$

وبالتالي : $g(3.5)\times g(3.6)<0$ ، نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $3.5<\alpha<3.6$.

هـ- استنتاج إشارة $g(x)$:

- $g(x)=0$ يكافئ $x\in\{1;\alpha\}$
- $g(x)<0$ يكافئ $x\in]1;\alpha[$
- $g(x)>0$ يكافئ $x\in]0;1[\cup]\alpha;+\infty[$

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- استنتاج إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$:

لدينا : $g(x)=0$ يكافئ $x\in\{1;\alpha\}$

وبالتالي فإن : $g\left(\frac{1}{x}\right)=0$ يكافئ $\frac{1}{x}\in\{1;\alpha\}$ ومنه : $x\in\left\{\frac{1}{\alpha};1\right\}$.

ولدينا : $g(x)<0$ يكافئ $x\in]1;\alpha[$

وبالتالي فإن : $g\left(\frac{1}{x}\right)<0$ يكافئ $\frac{1}{x}\in]1;\alpha[$ ومنه : $x\in\left]\frac{1}{\alpha};1\right[$

وعليه فإن : $g\left(\frac{1}{x}\right)>0$ يكافئ $x\in\left]0;\frac{1}{\alpha}\right[\cup]1;+\infty[$

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1		$+\infty$
$g\left(\frac{1}{x}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3 أ- حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)}{x}$:

لدينا : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(-x+1+x\ln x)$

ونعلم أن : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(-x+1)=1$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}x\ln x=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)}{x}=1$.

- التفسير الهندسي لـ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)}{x}=1$:

المنحني (C_f) يقبل عند النقطة O نصف مماس على اليمين يوازي المنصف الأول

ب- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(-1+\frac{1}{x}+\ln x\right)=+\infty$

جـ- تبيان أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ فإن $f'(x)=x\,g\left(\frac{1}{x}\right)$:

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=-2x+1+2x\ln x+\frac{1}{x}\times x^2$

$$=-x+1+2x\ln x=x\left(-1+\frac{1}{x}+2\ln x\right)$$

$$=x\left(\frac{1}{x}-1-2\ln\frac{1}{x}\right)=x\,g\left(\frac{1}{x}\right)$$

- استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha};1\right]$ ومتزايدة تماما على كل من المجالين $\left[0;\frac{1}{\alpha}\right]$ و $[1;+\infty[$.

د- جدول تغيّرات الدالة f :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

● تبيان أن $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$:

لدينا : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ ... (1)

ولدينا : $g(\alpha)=0$ أي : $\alpha-1-2\ln\alpha=0$ ومنه : $\alpha-1+2\ln\frac{1}{\alpha}=0$

وبالتالي : $\ln\frac{1}{\alpha}=\frac{1-\alpha}{2}$ وبالتعويض في المساواة (1) ينتج :

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\times\frac{1-\alpha}{2}=\frac{-2+2\alpha+1-\alpha}{2\alpha^2}=\frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$$

إذن : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$

● استنتاج حصر للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$:

لدينا : $3.5<\alpha<3.6$ ومنه : $2.5<\alpha-1<2.6$ ... (1)

ولدينا : $3.5<\alpha<3.6$ ومنه : $(3.5)^2<\alpha^2<(3.6)^2$

وبالتالي : $24.5<2\alpha^2<25.92$ وعليه : $0.038<\frac{1}{2\alpha^2}<0.041$ ... (2)

من (1) و (2) وبالضرب طرفا في طرف ينتج :

$2.6\times0.041 < \dfrac{\alpha-1}{2\alpha^2} < 2.5\times0.038$ وبالتالي :

$0.106 < \dfrac{\alpha-1}{2\alpha^2} < 0.095$ أي : $0.106 < f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) < 0.095$

إذن : $0.106 < f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) < 0.095$

4 رسم المنحني (C_f) على المجال $[0;3]$: