

حل الموضوع الأول

التمرين 1 :

1 أ- نشر العبارة $(5x^2 + 6)(x + 1)$:

$$(1) \dots (5x^2 + 6)(x + 1) = 5x^3 + 5x^2 + 6x + 6$$

ب- إيجاد علاقة تربط بين x و y :

$$(2) \dots A = (5x^2 + 6)(2 + 2y)$$

ومن جهة أخرى ، لدينا : $A = 5566 = 5x^3 + 5x^2 + 6x + 6$... (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $x + 1 = 2 + 2y$ ومنه : $x = 2y + 1$

ب- حساب x و y :

لدينا : $A = 5566$ عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل $A = 5566$

وبالتالي فإن $x > 6$ ، ونعلم أن x عدد أولي أصغر من 12

نستنتج أن : $x \in \{7; 11\}$.

- عندما $x = 7$ وبالتعويض في المعادلة $x = 2y + 1$ نجد : $y = 3$.

- عندما $x = 11$ وبالتعويض في المعادلة $x = 2y + 1$ نجد : $y = 5$.

إذن : $(x; y) \in \{(7; 3), (11; 5)\}$.

• كتابة العدد A في نظام التعداد العشري :

- من أجل : $(x; y) = (7; 3)$ نجد : $A = 2008$

- من أجل : $(x; y) = (11; 5)$ نجد : $A = 7332$

2 أ- تعيين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584 :

تحليل العدد 584 إلى جداء عوامل أولية : $584 = 2^3 \times 73$

نستنتج أن مجموعة الأعداد المطلوبة هي $\{1; 2\}$.

ب- تعيين الأعداد الطبيعية a و b التي تحقق الشروط :

تذكير : إذا كان $PGCD(a; b) = d$ فإنه يوجد عدنان طبيعيان a' و b' أوليان

فيما بينهما بحيث : $a = d \times a'$ و $b = d \times b'$.

نفرض أن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b أي $PGCD(a; b) = d$

$$\begin{cases} da' + db' = 32 \\ (da')^2 + (db')^2 = 584 \end{cases} \quad \text{كما يلي :} \quad \begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases} \quad \text{يمكن كتابة الجملة}$$

$$\begin{cases} d \mid 32 \\ d^2 \mid 584 \end{cases} \quad \text{وبالتالي :} \quad \begin{cases} d(a' + b') = 32 \\ d^2(a'^2 + b'^2) = 584 \end{cases} \quad \text{ومنه :}$$

وحسب السؤال 2 الفرع - أ- نستنتج أن : $d \in \{1; 2\}$
- الحالة الأولى $d = 1$:

$$\begin{cases} (a' + b') = 32 \\ (a'^2 + b'^2) = 584 \end{cases} \text{ عندئذ كما يلي : } \begin{cases} d(a' + b') = 32 \\ d^2(a'^2 + b'^2) = 584 \end{cases} \text{ تكتب الجملة}$$

من $a' + b' = 32$ ينتج $b' = 32 - a'$ وبالتعويض في $a'^2 + b'^2 = 584$ نجد $2a'^2 - 64a' + 440 = 0$ وبالقسمة على 2 ينتج $a'^2 - 32a' + 220 = 0$ وبحل هذه المعادلة الأخيرة نحصل على : $a' = 10$ أو $a' = 22$

ومنه : $(a'; b') \in \{(10; 22), (22; 10)\}$

وبالتالي : $(a; b) \in \{(10; 22), (22; 10)\}$

وبما أن $a > b$ نستنتج أن : $(a; b) = (22; 10)$

- الحالة الثانية $d = 2$:

باتباع نفس الطريقة السابقة نجد : $(a'; b') \in \{(5; 11), (11; 5)\}$

وبالتالي : $(a; b) \in \{(10; 22), (22; 10)\}$

وبما أن $a > b$ نستنتج أن : $(a; b) = (22; 10)$

$$\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases} \text{ خلاصة : توجد ثنائية وحيدة } (a; b) \text{ حيث } a > b \text{ وتحقق}$$

هي : $(a; b) = (22; 10)$

التمرين الثاني :

1 أ- حساب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء :

نسمي A الحادثة : « الحصول على 3 كريات بيضاء »

$$P(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30} \text{ ومنه :}$$

ب- حساب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء :

نسمي B الحادثة : « الحصول على الأقل على كرية حمراء »

« الحصول على الأقل على كرية حمراء » معناه : « الحصول على :

(كرية حمراء و كرتين غير حمراوين) أو (كرتين حمراوان و كرية غير

حمراء) أو (ثلاث كريات حمراء) » .

$$P(B) = \frac{C_6^1 \times C_4^2 + C_6^2 \times C_4^1 + C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{36 + 60 + 20}{120} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30} \text{ ومنه :}$$

طريقة أخرى :

نسمي \bar{B} الحادثة العكسية للحادثة B أي : \bar{B} هي الحادثة : « الحصول على 3

كريات بيضاء » أي أن \bar{B} هي الحادثة A ومنه : $P(\bar{B}) = P(A) = \frac{1}{30}$.

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30} \quad \text{إذن :}$$

2 أ- القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 .
- قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} \quad . \quad P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=3) = P(A) = \frac{1}{30} \quad . \quad P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

إذن :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$	$\frac{60}{120} = \frac{1}{2}$	$\frac{36}{120} = \frac{3}{10}$	$\frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

• حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = x_0 P_0 + x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3$$

$$= 0 \times \frac{20}{120} + 1 \times \frac{60}{120} + 2 \times \frac{36}{120} + 3 \times \frac{4}{120} = \frac{144}{120} = \frac{6}{5} = 1.2$$

3 حساب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط :

سحب 3 كريات بيضاء من الكيس هي تجربة برنولي حيث أن المخرج S هو :

« الحصول على 3 كريات بيضاء » ومنه : $P(S) = P(A) = \frac{1}{30}$.

الخمس سحبات هي سحبات مستقلة ، وهذا يعني أننا أمام مخطط برنولي .

$$P(X=k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k} \quad \text{تذكير :}$$

احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط هو $P(X=2)$ حيث :

$$P(X=2) = C_5^2 P^2 (1-P)^{5-2} = 10 \times \left(\frac{1}{30}\right)^2 \times \left(\frac{29}{30}\right)^3 = \frac{10 \times 29^3}{30^5} \approx 0.01$$

التمرين الثالث :

1 أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) :

تذكير : تكون نقطة $M(x; y; z)$ من (AB) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث : $\vec{AM} = t \vec{AB}$. لدينا : $\vec{AB}(-2; 1; -3)$ ومنه التمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{التالي :}$$

ب- إثبات أن (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي :

$\vec{u}(3; -1; 2)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) و $\vec{AB}(-2; 1; -3)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB) . الشعاعان \vec{u} و \vec{AB} غير مرتبطين خطيا (لا يوجد عدد حقيقي t بحيث $\vec{AB} = t \vec{u}$) ، نستنتج أن المستقيمين (D) و (AB) غير متوازيين وهذا يعني أنهما إما من نفس المستوي ومتقاطعان ، وإما ليسا من نفس المستوي .

لنبين أن المستقيمين (D) و (AB) غير متقاطعين :

$$\begin{cases} 2 + 3t = 2 - 2t' \\ 1 - t = 1 + t' \\ 2t = 2 - 3t' \end{cases} \quad \text{للبحث عن نقط تقاطع } (D) \text{ و } (AB) \text{ نقوم بحل الجملة :}$$

من المعادلتين الأولى والثانية لهذه الجملة نجد : $t = 0$ و $t' = 0$ وبتعويض هاتين القيمتين في المعادلة الثالثة نحصل على $0 = 2$ وهذا مستحيل . نستنتج أن المستقيمين (D) و (AB) غير متقاطعين .

إذن : المستقيمان (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي .

2 أ- تبيان أن الشعاع $\vec{n}(1; 5; 1)$ عمودي على المستوي (P) :

طريقة : لإثبات أن \vec{n} عمودي على (P) يكفي إثبات أنه عمودي على كل من الشعاعين \vec{AB} و \vec{u} باعتبارهما شعاعي توجيه للمستوي (P) .

لدينا : $\vec{n}(1; 5; 1)$ ، $\vec{AB}(-2; 1; -3)$ و $\vec{u}(3; -1; 2)$ ومنه : $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1(-2) + 5 \times 1 + 1(-3) = 5 - 5 = 0$ وبالتالي : $\vec{n} \perp \vec{AB}$

و $\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 \times 3 + 5(-1) + 1 \times 2 = 5 - 5 = 0$ وبالتالي : $\vec{n} \perp \vec{u}$

إذن : \vec{n} عمودي على المستوي (P) أي أن شعاع ناظمي للمستوي (P) .

ب- كتابة معادلة للمستوي (P) :

\vec{n} شعاع ناظمي للمستوي (P) وبالتالي فإن معادلة (P) من الشكل :

$$x + 5y + z + d = 0 \quad \text{حيث } d \text{ عدد حقيقي .}$$

وبما أن (AB) محتوي في (P) فإن $A \in (P)$ ومنه : $2 + 5 \times 1 + 2 + d = 0$

وبالتالي : $d = -9$.

إذن : معادلة للمستوي (P) هي : $x + 5y + z - 9 = 0$

ج- تبين أن المسافة بين نقطة M من (D) والمستوي (P) مستقلة عن موضع M :
تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0; y_0; z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax + by + cz + d = 0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A; (P))$ حيث :

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(M; (P)) = \frac{|2 + 3t + 5(1-t) + 2t - 9|}{\sqrt{1 + 25 + 1}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$
 ومنه :

إذن : $d(M; (P)) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ وهي ثابتة لا تتعلق بموضع النقطة M .

د- تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) مع المستوي (yOz) :
معادلة للمستوي (yOz) هي : $x = 0$

$$\begin{cases} x=0 \\ z=-5y+9 \end{cases} \text{ وبالتالي } \begin{cases} x=0 \\ 5y+z-9=0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x=0 \\ x+5y+z-9=0 \end{cases} \text{ لدينا :}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=-5\lambda+9 \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}) \text{ وبوضع } y = \lambda \text{ نحصل على تمثيل وسيطي لـ } (\Delta) :$$

التمرين الرابع :

1 أ- دراسة تغيرات الدالة f :

$$f(1) = 3 \text{ و } f(2) = \frac{9}{4}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 5}{2x^2} \text{ : حساب } f'(x)$$

• إشارة $f'(x)$:

x	1	$\sqrt{5}$	5
$f'(x)$	-	0	+

إذن : الدالة f متناقصة على $[1; \sqrt{5}]$ و متزايدة على $[\sqrt{5}; 5]$.

• جدول تغيرات الدالة f على المجال $[1;5]$:

x	1	$\sqrt{5}$	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	3	$\sqrt{5}$	3

ب- إنشاء المنحني (C) والمستقيم (Δ) : انظر الشكل .

2 أ- حساب u_1 و u_2 : $u_1=3$ و $u_2=\frac{7}{3}$.

ب- تمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل : انظر الشكل .
 ننتقل من الفاصلة $u_0=5$ ، ترتيب النقطة من المنحني (C) الموافق لهذه الفاصلة يعطينا u_1 . نقوم بنقل العدد u_1 إلى محور الفواصل ومن أجل هذا ، نستعمل (Δ) .
 وبالتالي فإن u_2 هو ترتيب النقطة من المنحني (C) ذات الفاصلة u_1 .
 نقوم بنقل العدد u_2 إلى محور الفواصل ومن أجل هذا ، نستعمل المستقيم (Δ) .

3 أ- البرهان بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$:

نسمي الخاصية " $u_n \geq \sqrt{5}$ " p_n

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_0 \geq \sqrt{5}$ أي : $5 \geq \sqrt{5}$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n \geq \sqrt{5}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1} \geq \sqrt{5}$

من فرضية التراجع : $u_n \geq \sqrt{5}$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $[\sqrt{5}; 5]$

نستنتج أن : $f(u_n) \geq f(\sqrt{5})$ أي : $u_{n+1} \geq \sqrt{5}$ (لأن : $f(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$ و

$f(u_n) = u_{n+1}$) وعليه فإن : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$.

ب- تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة على \mathbb{N} :

تذكير : (u_n) متناقصة على \mathbb{N} معناه : من أجل كل n من \mathbb{N} ، $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ،

من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -\frac{u_n^2 - 5}{2u_n}$

من السؤال (3) الفرع - أ- وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$ ،

ومنه : $u_n^2 \geq (\sqrt{5})^2 = 5$ أي : $u_n^2 \geq 5 \dots (1)$

كذلك : من أجل كل n من \mathbb{N} ، $u_n \geq \sqrt{5}$ ، ومنه : $u_n > 0$

وبالتالي : $2u_n > 0 \dots (2)$

من (1) و (2) نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $-\frac{u_n^2 - 5}{2u_n} \leq 0$ ،

أي : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

إذن : المتتالية (u_n) متناقصة على \mathbb{N} .

طريقة أخرى :

تذكير : (u_n) متناقصة على \mathbb{N} معناه : من أجل كل n من \mathbb{N} ، $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ ،

من السؤال (3) الفرع - أ- نستنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$ ،

وبالتالي : من أجل كل n من \mathbb{N} ، $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{u_n^2} \right)$ ،

ومن السؤال (3) الفرع - أ- وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$ ،

ومنه : $u_n^2 \geq (\sqrt{5})^2 = 5$ أي : $u_n^2 \geq 5$ وبالتالي : $\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{1}{5}$ ومنه : $\frac{5}{u_n^2} \leq \frac{5}{5} = 1$

أي : $\frac{5}{u_n^2} \leq 1$ ومنه : $1 + \frac{5}{u_n^2} \leq 1 + 1 = 2$ أي : $1 + \frac{5}{u_n^2} \leq 2$

وأخيرا : $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{u_n^2} \right) \leq 1$ أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

إذن : المتتالية (u_n) متناقصة على \mathbb{N} .

• تقارب المتتالية (u_n) :

تذكير : كل متتالية محدودة من الأعلى و متزايدة أو محدودة من الأسفل و متناقصة هي متتالية متقاربة .

من السؤال 3 الفرع - أ- وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$ وهذا يعني أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل .

ومن السؤال 3 الفرع - ب- وجدنا أن المتتالية (u_n) متناقصة على \mathbb{N} . نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة (متناقصة ومحدودة من الأسفل) .

4 أ- البرهان أنه ، من أجل كل n من \mathbb{N} ، $u_{n+1} - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$ ، من أجل كل n من \mathbb{N} ،

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{5} &= \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{5}{u_n} \right) - \sqrt{5} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{5}{u_n} - 2\sqrt{5} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(u_n - \sqrt{5} + \frac{5}{u_n} - \sqrt{5} \right) \\ &= \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{5}) + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{u_n} - \sqrt{5} \right) \\ &= \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{5}) + \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{\sqrt{5}}{u_n} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{5}) - \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n} \right) \end{aligned}$$

ومن السؤال 3 الفرع - أ- وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$

ومنه : $\frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n} \right) \geq 0$. نستنتج أن : $u_{n+1} - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$.

إذن : من أجل كل n من \mathbb{N} ، $u_{n+1} - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$.

ب- استنتاج أن $u_n - \sqrt{5} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n (u_0 - \sqrt{5})$

من السؤال السابق وجدنا أنه من أجل كل n من \mathbb{N} ،

$$u_{n+1} - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$$

بالضرب طرف في
طرف ثم اختزال
الحدود المتشابهة
نحصل على :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{من أجل } n=0 : u_1 - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2}(u_0 - \sqrt{5}) \\ \text{من أجل } n=1 : u_2 - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2}(u_1 - \sqrt{5}) \\ \text{من أجل } n=2 : u_3 - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2}(u_2 - \sqrt{5}) \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ u_{n-1} - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2}(u_{n-2} - \sqrt{5}) \\ u_n - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - \sqrt{5}) \end{array} \right.$$

$$u_n - \sqrt{5} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{5})$$

• حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

تذكير بمبرهنة الحصر : (u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية ، l عدد حقيقي .

إذا كان ابتداء من رتبة معينة ، $v_n \leq u_n \leq w_n$ وكانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

تذكير : إذا كان $-1 < q < +1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ وبالتالي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

من السؤال ③ الفرع - أ- وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \sqrt{5}$ ، وبالتالي : $u_n - \sqrt{5} \geq 0$.

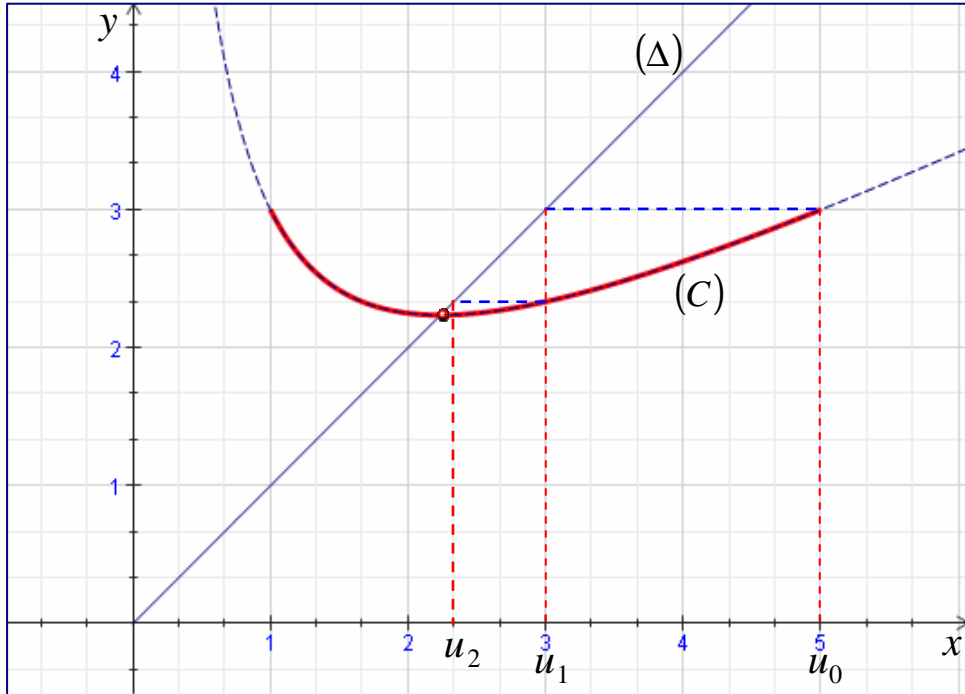
ومن السؤال ④ الفرع - ب- وجدنا أن : $u_n - \sqrt{5} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{5})$

ومنه : $0 \leq u_n - \sqrt{5} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{5})$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ وبما أن :

نستنتج أن : $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \sqrt{5}) \leq 0$ وحسب مبرهنة الحصر نستنتج أن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \sqrt{5}) = 0 \quad \text{. إذن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{5}$$

• الرسم :



حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1 حل المعادلة $(45 + 45i)f(z) = 23 + 45i - 2z$:

لدينا : $(45 + 45i)f(z) = 23 + 45i - 2z$

ومنه : $(45 + 45i) \times \frac{z-i}{z-1} = 23 + 45i - 2z$

ومنه : $(45 + 45i)(z-i) = (23 + 45i - 2z)(z-1)$

وبعد النشر والتبسيط والترتيب نحصل على المعادلة : $2z^2 + 20z + 68 = 0$

وبالقسمة على 2 نجد : $z^2 + 10z + 34 = 0 \dots (E)$

مميز المعادلة (E) هو : $\Delta = -36 = 36i^2 = (6i)^2$

بما أن المميز هو عدد حقيقي سالب فإن هذه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما

$z' = -5 - 3i$ و $z'' = -5 + 3i$

إذن : المعادلة المعطاة تقبل حلين هما : $z' = -5 - 3i$ و $z'' = -5 + 3i$

2 أ- تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا تماما :

• طريقة أولى :

تذكير : التفسير الهندسي لـ $\left| \frac{z-z_A}{z-z_B} \right|$ و $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)$:

إذا كانت A ، B و M صور الأعداد المركبة z_A ، z_B و z على الترتيب

حيث $z \neq z_B$ فإن :

$$\begin{cases} \left| \frac{z-z_A}{z-z_B} \right| = \frac{AM}{BM} \\ \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) [2\pi] \end{cases}$$

لتكن النقطتان A و B صورتي العدديين المركبين $z_A = 1$ و $z_B = i$ على الترتيب

$$f(z) = \frac{z-i}{z-1} = \frac{z-z_B}{z-z_A} \text{ لدينا}$$

($f(z)$ حقيقي سالب تماما) يكافئ $(\arg(f(z)) \equiv \pi [2\pi])$ و $z \neq z_A$ و $z \neq z_B$ ومنه : $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \pi + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) و $M \neq A$ و $M \neq B$.
أي : $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) و $M \neq A$ و $M \neq B$.

إذن : مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا هي القطعة المستقيمة $[AB]$ ما عدا النقطتين A و B (أي : القطعة المفتوحة $]AB[$) .

• طريقة ثانية :

كتابة $f(z)$ على الشكل الجبري : نضع $z = x + iy$ حيث $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(z) = \frac{z-i}{z-1} = \frac{x+iy-i}{x+iy-1} = \frac{x+i(y-1)}{(x-1)+iy} \times \frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - x - y + i(1-x-y)}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - x - y}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{(1-x-y)}{(x-1)^2 + y^2} i$$

$$f(z) = \frac{x^2 + y^2 - x - y}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{(1-x-y)}{(x-1)^2 + y^2} i \text{ : إذن}$$

تذكير : ($f(z)$ حقيقي سالب تماما) يكافئ $(\text{Im}(f(z)) = 0$ و $\text{Re}(f(z)) < 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} -x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - x - y < 0 \\ (x-1)^2 + y^2 \neq 0 \end{array} \right. \text{ وبالتالي : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{(1-x-y)}{(x-1)^2 + y^2} = 0 \\ \frac{x^2 + y^2 - x - y}{(x-1)^2 + y^2} < 0 \end{array} \right. \text{ ومنه :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x - y + 1 = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ (x; y) \neq (1; 0) \end{array} \right. \text{ وأخيرا :}$$

- مجموعة النقط M من المستوي حيث $-x - y + 1 = 0$ هي المستقيم (AB)

- مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ هي

القرص الدائري (C) الذي مركزه النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ونصف قطره $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- تقاطع (AB) و (C) هي القطعة المفتوحة $]AB[$.

إذن : مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سائبا هي القطعة المستقيمة

$]AB[$ ما عدا النقطتين A و B (أي : القطعة المفتوحة $]AB[$).

ب- حساب z_0 بحيث يكون $|f(z_0)| = 1$ و $\arg(f(z_0)) = \frac{3\pi}{2}$:

بما أن : $|f(z_0)| = 1$ و $\arg(f(z_0)) = \frac{3\pi}{2}$ فإن $f(z_0) = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$:

وبحل المعادلة : $\frac{z_0 - i}{z_0 - 1} = -i$ نجد : $z_0 = 1 + i$

3 أ- طبيعة المثلث ABC :

$AC = |z_C - z_A| = |z_0 - 1| = |i| = 1$ ، $AB = |z_B - z_A| = |i - 1| = \sqrt{2}$

و $BC = |z_C - z_B| = |z_0 - i| = |1| = 1$.

نلاحظ أن : $AC^2 + BC^2 = AB^2$ و $AC = BC$ ، نستنتج أن المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين .

• **طريقة ثانية :** يمكن الوصول إلى نفس النتيجة بملاحظة أن :

$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$ و $CA = CB$.

• **طريقة ثالثة :** المثلث ABC متساوي الساقين و قائما في C لأن :

$\begin{cases} CB = CA \\ (\vec{CB}; \vec{CA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} |i| = 1 \\ \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ و $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = i$

($\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = (\vec{CB}; \vec{CA})$ و $\left|\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right| = \frac{CA}{CB}$)

ب- تعيين النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) :

معادلة (AB) هي $-x - y + 1 = 0$ وبالتالي $\vec{AB}(1; -1)$ شعاع توجيه له .

تكون النقطة D نظيرة للنقطة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) إذا وفقط إذا كان :
 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ ومنتصف القطعة $[CD]$ تنتمي إلى المستقيم (AB) .

$$\begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 0 \end{cases} \text{ نحصل على : } \begin{cases} 1(x_D - 1) - 1(y_D - 1) = 0 \\ -\frac{x_C + x_D}{2} - \frac{y_C + y_D}{2} + 1 = 0 \end{cases} \text{ وبحل الجملة :}$$

إذن : $D(0; 0)$ أي أن نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) هي النقطة O .

• استنتاج طبيعة الرباعي $ACBD$:

بما أن النقطتين C و D متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم (AB) فإن $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$
 أي أن قطري الرباعي $ACBD$ متعامدان ، وزيادة على ذلك فهما متقايسان لأن :
 $AB = CD = \sqrt{2}$. نستنتج أن الرباعي $ACBD$ هو مربع .

التمرين الثاني :

1) تعيين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية :

تذكير : تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :

$$v_{n+1} = q.v_n , n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

$$\text{لدينا : } u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1 \text{ ولدينا : } v_n = u_n + \alpha n + \beta$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 3u_n + 2n + 1 + \alpha n + \alpha + \beta$$

$$= 3u_n + (\alpha + 2)n + 1 + \alpha + \beta$$

$$\text{ومن جهة أخرى ، لدينا : } qv_n = qu_n + q\alpha n + q\beta$$

$$\text{وبالتالي : } 3u_n + (\alpha + 2)n + 1 + \alpha + \beta = qu_n + q\alpha n + q\beta$$

$$\begin{cases} q = 3 \\ \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} q = 3 \\ \alpha + 2 = 3\alpha \\ 1 + \alpha + \beta = 3\beta \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} 3 = q \\ \alpha + 2 = q\alpha \\ 1 + \alpha + \beta = q\beta \end{cases} \text{ بالمطابقة :}$$

إذن : من أجل $\alpha = \beta = 1$ تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها

$$\text{الأول } v_0 = 1 .$$

$$2) \text{ كتابة } v_n \text{ بدلالة } n : v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 3^n = 3^n$$

• استنتاج u_n بدلالة n :

من المساواة : $v_n = u_n + n + 1$ نستنتج أن : $u_n = v_n - n - 1 = 3^n - n - 1$

3) حساب المجموع S_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \frac{1}{2} (3^{n+1} - 1)$$

• حساب المجموع S'_n :

نضع : $w_n = -n - 1$ و $v_n = 3^n$ حيث $u_n = v_n + (-n - 1) = v_n + w_n$
واضح أن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدّها الأول $v_0 = 1$.
كذلك : (w_n) متتالية حسابية أساسها $q' = -1$ وحدّها الأول $w_0 = -1$.

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n && \text{ومنه :} \\ &= (v_0 + w_0) + (v_1 + w_1) + \dots + (v_n + w_n) \\ &= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (w_0 + w_1 + \dots + w_n) \end{aligned}$$

$$\text{ونعلم أن : } v_0 + v_1 + \dots + v_n = S_n = \frac{1}{2} (3^{n+1} - 1)$$

$$\text{و } w_0 + w_1 + \dots + w_n = \frac{n+1}{2} (w_0 + w_n) = -\frac{1}{2} (n+1)(n+2)$$

$$S'_n = \frac{1}{2} (3^{n+1} - 1) - \frac{1}{2} (n+1)(n+2) = \frac{1}{2} (3^{n+1} - (n+1)(n+2) - 1) \quad \text{إذن :}$$

4 أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 :

$$3^0 \equiv 1[5], \quad 3^1 \equiv 3[5], \quad 3^2 \equiv 4[5], \quad 3^3 \equiv 2[5], \quad 3^4 \equiv 1[5]$$

من العلاقة : $3^4 \equiv 1[5]$ نستنتج أن : $(3^4)^k \equiv 1^k [5]$ أي : $3^{4k} \equiv 1[5]$ مع $k \in \mathbb{N}$

$$3^{4k+1} \equiv 3[5], \quad 3^{4k+2} \equiv 4[5], \quad 3^{4k+3} \equiv 2[5]$$

إذن : بواقي قسمة 3^n على 5 دورية ودورها 4 ونلخصها في الجدول الآتي :
في هذا الجدول يدلّ k على عدد طبيعي .

$4k + 3$	$4k + 2$	$4k + 1$	$4k$	n
2	4	3	1	البواقي

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها u_n مضاعفا للعدد 5 :

$$\text{لدينا : } u_n = 3^n - n - 1 \text{ ومنه : } u_n \equiv 0[5] \text{ يكافئ } 3^n - n - 1 \equiv 0[5]$$

$$\text{- إذا كان } n = 4k \text{ : } 3^{4k} - 4k - 1 \equiv 0[5] \text{ ومنه : } 1 - 4k - 1 \equiv 0[5]$$

أي : $-4k \equiv 0 [5]$ وبالتالي $k \equiv 0 [5]$ ومنه : $k \equiv 5k'$ حيث $k' \in \mathbb{N}$
 في هذه الحالة يكون : $n = 20k'$ حيث $k' \in \mathbb{N}$.

- إذا كان $n = 4k + 1$: $3^{4k+1} - (4k+1) - 1 \equiv 0 [5]$
 ومنه : $3 - 4k - 2 \equiv 0 [5]$ أي : $-4k \equiv -1 [5]$ وبما أن : $-4 \equiv 1 [5]$
 و $-1 \equiv 4 [5]$ ينتج : $k \equiv 4 [5]$ ومنه : $k \equiv 5k' + 4$ حيث $k' \in \mathbb{N}$
 في هذه الحالة يكون : $n = 20k' + 17$ حيث $k' \in \mathbb{N}$.

- إذا كان $n = 4k + 2$: $3^{4k+2} - (4k+2) - 1 \equiv 0 [5]$
 ومنه : $4 - 4k - 3 \equiv 0 [5]$ أي : $-4k \equiv -1 [5]$ وبما أن : $-4 \equiv 1 [5]$
 و $-1 \equiv 4 [5]$ ينتج : $k \equiv 4 [5]$ ومنه : $k \equiv 5k' + 4$ حيث $k' \in \mathbb{N}$
 في هذه الحالة يكون : $n = 20k' + 18$ حيث $k' \in \mathbb{N}$.

- إذا كان $n = 4k + 3$: $3^{4k+3} - (4k+3) - 1 \equiv 0 [5]$
 ومنه : $2 - 4k - 4 \equiv 0 [5]$ أي : $-4k \equiv 2 [5]$ وبما أن : $-4 \equiv 1 [5]$
 ينتج : $k \equiv 2 [5]$ ومنه : $k \equiv 5k' + 2$ حيث $k' \in \mathbb{N}$
 في هذه الحالة يكون : $n = 20k' + 11$ حيث $k' \in \mathbb{N}$.

التمرين الثالث :

1 كتابة معادلة للمستوي (P_2) :

$$\begin{cases} y = 1 + \alpha \\ x = 1 + 2\alpha + \beta \\ z = 5 + \alpha + \beta \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha \\ z = 5 + \alpha + \beta \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$\begin{cases} \alpha = y - 1 \\ \beta = x - 2y + 1 \\ z = 4 + y + x - 2y + 1 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \alpha = y - 1 \\ x = 1 + 2(y - 1) + \beta \\ z = 5 + y - 1 + \beta \end{cases} \text{ ومنه}$$

وبتبسيط المعادلة الثالثة نحصل على المعادلة : $x - y - z + 5 = 0$

إذن : معادلة للمستوي (P_2) هي : $x - y - z + 5 = 0$

2 تعيين \vec{n}_1 و \vec{n}_2 :

معادلة للمستوي (P_1) هي : $x + 2y - z - 2 = 0$ ومنه : $\vec{n}_1(1; 2; -1)$

معادلة للمستوي (P_2) هي : $x - y - z + 5 = 0$ ومنه : $\vec{n}_2(1; -1; -1)$

3 تبيان أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان :

لدينا : $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \times 1 + 2(-1) + (-1)(-1) = 2 - 2 = 0$ ومنه : $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$
إذن : المستويان (P_1) و (P_2) متعامدان .

4 أ- حساب d_1 و d_2 :

تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0; y_0; z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax + by + cz + d = 0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A; (P))$ حيث :

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\begin{cases} d_1 = \frac{|3 + 2 \times 1 - 1 - 2|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ d_2 = \frac{|3 - 1 \times 1 - 1 + 5|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

ب- استنتاج المسافة d_3 بين النقطة A والمستقيم (Δ) تقاطع (P_1) و (P_2) :
 نعلم أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان و (Δ) مستقيم تقاطعهما . النقطة A لا تنتمي إلى (P_1) ولا تنتمي إلى (P_2) .
 المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) هي الطول AH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) .
 لتكن A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_2) ، وبالتالي فإن المثلث $AA'H$ قائم في A' ، وحسب مبرهنة فيثاغورث :

$$d_3^2 = AH^2 = d_1^2 + d_2^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + (2\sqrt{3})^2 = \frac{114}{9}$$

$$d_3 = \frac{\sqrt{114}}{3} \quad \text{إذن :}$$

5 أ- تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) بدلالة الوسيط الحقيقي λ :

$$\begin{cases} x = z - 2y + 2 \\ (z - 2y + 2) - y - z + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا :} \quad \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x - y - z + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{ومنه :}$$

$$\begin{cases} x = z - 2 \times \frac{7}{3} + 2 = z - \frac{8}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases} \quad \text{وبالتالي :} \quad \begin{cases} x = z - 2y + 2 \\ y = \frac{7}{3} \end{cases} \quad \text{وأخيرا :}$$

$$\begin{cases} x = \lambda - \frac{8}{3} \\ y = \frac{7}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{وبوضع } z = \lambda \text{ نحصل على التمثيل الوسيطى التالي :}$$

ب- حساب AM^2 بدلالة λ :

$$\vec{AM} (x-3; y-1; z-1) \text{ لدينا :}$$

$$\begin{aligned} AM^2 &= (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \\ &= \left(\lambda - \frac{8}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{7}{3} - 1\right)^2 + (\lambda - 1)^2 \quad \text{ومنه :} \\ &= 2\lambda^2 - \frac{40}{3}\lambda + \frac{314}{9} \end{aligned}$$

• استنتاج ثانية المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) :
المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) هي أقصر مسافة بين A و (Δ) ، هذه المسافة هي AH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) .

$$\text{لتكن } f \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ : } f(\lambda) = 2\lambda^2 - \frac{40}{3}\lambda + \frac{314}{9}$$

* دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ و } f'(\lambda) = 4\lambda - \frac{40}{3}$$

$$(f'(\lambda) = 0) \text{ يكافئ } (4\lambda - \frac{40}{3} = 0) \text{ ومنه : } \lambda = \frac{10}{3}$$

الدالة f متناقصة على $]-\infty; \frac{10}{3}]$ و متزايدة على $[\frac{10}{3}; +\infty[$ وتقبل قيمة صغرى

من أجل $\lambda = \frac{10}{3}$. عندئذ تكون المسافة AM صغرى (أصغرى) .

النقطة الموافقة لهذه القيمة الصغرى هي $H\left(\frac{2}{3}; \frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

$$AH = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{7}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{10}{3} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{114}}{3} \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

$$\text{إذن : } AH = \frac{\sqrt{114}}{3} \quad (\text{لاحظ أن } d_3 = AH = \frac{\sqrt{114}}{3})$$

التمرين الرابع :

1) دراسة تغيّرات الدالة f :

• النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

• حساب $f'(x)$: $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$

• إشارة $f'(x)$: من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$.

• إذن : الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

• جدول التغيرات :

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2) أ- تبيان أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته $y = x$:

• بما أن : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) .

• تذكير : إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي : $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ وكانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$.

لدينا : $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ وهي من الشكل $f(x) = ax + b + \varphi(x)$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = 0$ نستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو

مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب- دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) والمستقيم (D) :

من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f(x) - x = -\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ وبالتالي فإن إشارة

الفرق $f(x) - x$ هي إشارة $-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$. وبما أنه ، من أجل كل x من المجال

$]-1; +\infty[$ ، $-\frac{2}{\sqrt{x+1}} < 0$ نستنتج أن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم (D) .

3 أ- تبيان أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $1.3 < x_0 < 1.4$:

تذكير بمبرهنة القيم المتوسطة . إذا كان :

1 f مستمرة على المجال $[a; b]$ ؛

2 f رتيبة تماما على المجال $[a; b]$ ؛

3 $f(a) \times f(b) < 0$.

تحليليا : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 من المجال $]a; b[$.

هندسيا : المنحني الممثل للدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]a; b[$.

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أنها مستمرة و متزايدة تماما على $[1.3; 1.4]$ ، زيادة على ذلك : $f(1.3) = -0.01$ و $f(1.4) = 0.10$ وبالتالي :

$f(1.3) \times f(1.4) < 0$. نستنتج أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث : $1.3 < x_0 < 1.4$.

ب- تعيين معادلة (Δ) مماس للمنحني (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور الترتيب :

تذكير : معادلة مماس المنحني الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي :

$$y = f'(a).(x - a) + f(a)$$

• تعيين نقطة تقاطع (C_f) مع محور الترتيب :

من أجل : $x = 0$ نجد : $f(0) = -2$ وبالتالي (C_f) يقطع محور الترتيب في النقطة $B(0; -2)$.

• كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة B :

معادلة (Δ) من الشكل : $y = f'(a).(x - a) + f(a)$ حيث :

$f(a) = f(0) = -2$ و $f'(a) = f'(0) = 2$ ومنه : $y = 2(x - 0) - 2$.

• إذن : معادلة المماس (Δ) هي $y = 2x - 2$.

جـ- رسم (Δ) و (C_f) : انظر الشكل .

4 إيجاد الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغير x :
تذكير : إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I وكان ، من أجل كل x من I ، $u(x) > 0$ ، تكون $2\sqrt{u} + c$ ($c \in \mathbb{R}$) دالة أصلية للدالة $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ على I .

لدينا : $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ و $I =]-1; +\infty[$
الدالة f مستمرة على $]-1; +\infty[$ وبالتالي فهي تقبل دوالا أصلية على هذا المجال
الدالة $u: x \mapsto x+1$ قابلة للاشتقاق على $]-1; +\infty[$ ومن أجل كل x من هذا المجال : $u'(x) = 1$ ، يمكن أن نكتب : $-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ على الشكل $-2 \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$
ونعلم أن $2\sqrt{u}$ هي دالة أصلية للدالة $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

إذن : مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]-1; +\infty[$ هي الدوال :

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 \times 2\sqrt{x+1} + c$ حيث c ثابت حقيقي .
ونعلم أن $F(0) = 0$ ومنه : $c = 4$.

إذن : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\sqrt{x+1} + 4$

5 تبيان كيفية إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) :

تذكير : $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; f(x) \leq 0 \end{cases}$

ومنه : $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in [x_0; +\infty[\\ -f(x) & ; x \in]-1; x_0] \end{cases}$

- إذا كان $x \in [x_0; +\infty[$ فإن $g(x) = f(x)$ ومنه : (C_g) ينطبق على (C_f) .
- إذا كان $x \in]-1; x_0]$ فإن $g(x) = -f(x)$ ومنه : (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل .

• رسم (C_g) : انظر الشكل .