حل الموضوع الأول

التمرين 1 :

1 كتابة العبارة المركبة للتشابه S :

عبارة التشابه المباشر S من الشكل $z' = az + b$.

لدينا : $\begin{cases} S(O) = O \\ S(A) = B \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} z_O = az_O + b \\ z_B = az_A + b \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a = i\sqrt{3} \\ b = 0 \end{cases}$

إذن : العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = \sqrt{3}\, iz$

• عناصر التشابه المباشر S : مركزه O ، نسبته $k = \sqrt{3}$ وزاويته $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

ملاحظة : يمكن الحصول على نفس النتيجة السابقة باستعمال التعريف التالي :

العبارة المركبة للتشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ ، نسبته k $(k > 0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

وبالتالي نحصل على : $z' = i\sqrt{3}\, z = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z$

2 أ- إنشاء النقط A_0 ، A_1 و A_2 : انظر الشكل

من العلاقة $A_{n+1} = S(A_n)$ نستنتج أن :

$A_1 = S(A_0)$ ومنه : $z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z_0 = \sqrt{3} + 3i$. إذن : $A_1(\sqrt{3}\, ; 3)$

$A_2 = S(A_1)$ ومنه : $z_2 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z_1 = -3\sqrt{3} + 3i$. إذن : $A_2(-3\sqrt{3}\, ; 3)$

ب- البرهان أن $z_n = 2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$:

من العلاقة $A_{n+1} = S(A_n)$ نستنتج أن :

$$z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z_0$$

$$z_2 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z_0 = \left(\sqrt{3}\right)^2 e^{i\frac{2\pi}{2}} z_0$$

$$z_3 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z_2 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}\right)^2 e^{i\frac{2\pi}{2}} z_0 = \left(\sqrt{3}\right)^3 e^{i\frac{3\pi}{2}} z_0$$

....

ومنه التعميم التالي : $z_n = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} z_{n-1} = \left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{2}} z_0$

ومن الخاصية : $e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ وعلما أن : $z_0 = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

نستنتج أن : $z_n=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}z_{n-1}=\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{2}}z_0=\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{2}}\times 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

إذن : $z_n=\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{2}}\times 2e^{-i\frac{\pi}{6}}=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

طريقة 2 : يمكن استعمال طريقة أخرى وذلك باستخدام النتيجة التالية :
من تعريف مركب التشابهات نستنتج أنه إذا كان S تشابها مباشرا مركزه النقطة O نسبته k وزاويته θ فإن مركب n مرة التشابه S هو تشابه مباشر له نفس المركز O، نسبته k^n وزاويته $n\theta$.

طريقة 3 : يمكن استعمال البرهان بالتراجع للبرهان أن $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

جـ- تعيين مجموعة الأعداد الطبيعية n :

لاحقة A_1 هي $z_1=\sqrt{3}+3i$ وبالتالي فإن معادلة المستقيم (OA_1) هي $y=\sqrt{3}x$

$[\ A_n\in(OA_1)\ ]$ يكافئ $[\ \arg(z_n)=\frac{\pi}{3}+k\pi\ ]$

ومنه : $\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k\pi$ نستنتج أن : $n=2k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$

إذن : تنتمي النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1) إذا كان n عددا طبيعيا فرديا

3 أ- إثبات أن (u_n) متتالية هندسية :

تذكير : (u_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :
من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=q\times u_n$

لدينا : $u_n=A_nA_{n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=A_{n+1}A_{n+2}$

حسب الخاصة المميزة للتشابه المباشر S فإن صورة الثنائية النقطية $(A_n\ ,A_{n+1})$ هي ثنائية نقطية $(A_{n+1}\ ,A_{n+2})$ بحيث : $A_{n+1}A_{n+2}=\sqrt{3}A_nA_{n+1}$

وبالتالي : $u_{n+1}=\sqrt{3}\,u_n$

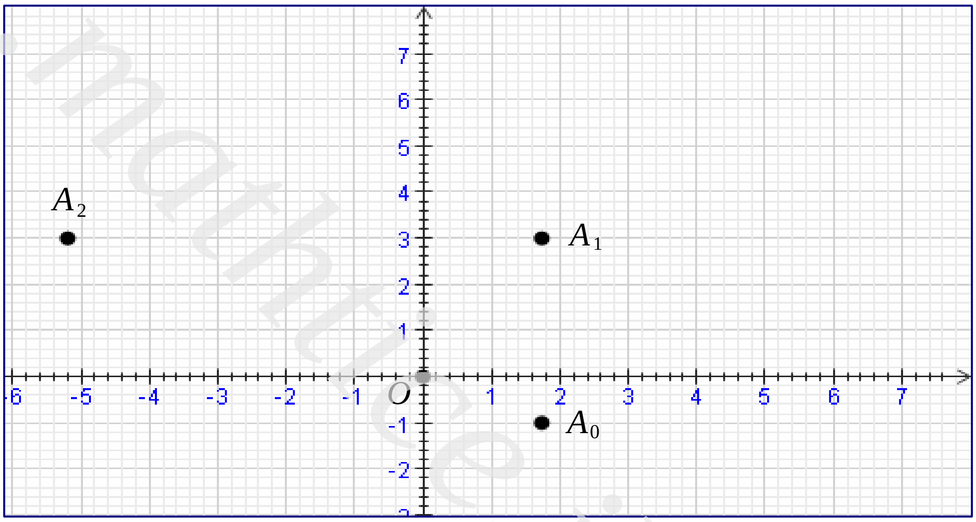
إذن : (u_n) متتالية هندسية حدّها الأول $u_0=A_0A_1=4$ وأساسها $q=\sqrt{3}$

ب- استنتاج عبارة u_n بدلالة n : $u_n=u_0\times q^n=4\left(\sqrt{3}\right)^n$

جـ- حساب المجموع S_n :

$$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=-2\left(1+\sqrt{3}\right)\left[1-\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}\right]$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$: نعلم أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}=+\infty$ وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$



التمرين 2 :

① كتابة المعادلة الديكارتية لسطح الكرة S :

معادلة S من الشكل : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

نصف قطر S هو : $r=CA=\sqrt{1+4+4}=3$

إذن : معادلة S هي $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$

② أ- كتابة معادلة للمستوي (P) :

$\vec{n}(-1;2;2)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) و هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء .

[$M\in(P)$] يكافئ [$\vec{n}\perp\overrightarrow{CM}$] ومنه : $\vec{n}.\overrightarrow{CM}=0$

وبالتالي : $-1\times(x-1)+2\times y+2\times(z+1)=0$

إذن : معادلة (P) هي $-x+2y+2z+3=0$

طريقة أخرى : بما أن الشعاع $\vec{n}(-1;2;2)$ ناظمي للمستوي (P) فإن معادلة (P) من الشكل : $-x+2y+2z+d=0$

ولأن $C\in(P)$ فإن $-1+2\times0+2\times(-1)+d=0$ ومنه : $d=3$

إذن : معادلة (P) هي $-x+2y+2z+3=0$

ب- حساب المسافة بين النقطة C والمستقيم (D) :

المسافة بين النقطة C والمستقيم (D) هي CH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (D) .

لتعيين إحداثيات النقطة H نقوم بحل الجملة : $\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-3+2\lambda \\ -x+2y+2z+3=0 \end{cases}$ فنجد : $\lambda=0$

وبالتالي : $H(-1;1;-3)$ ومنه : $CH=\sqrt{4+1+4}=3$

إذن : المسافة بين النقطة C والمستقيم (D) هي $d(C;(D))=CH=3$

جـ- الوضع النسبي لكل من المستقيم (D) وسطح الكرة S :

بما أن بُعد النقطة C (مركز سطح الكرة) عن المستقيم (D) يساوي نصف قطر سطح الكرة S نستنتج أن المستقيم (D) مماس لسطح الكرة S .

التمرين 3 :

1 أ- تبيان أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

تذكير : تقبل المعادلة $ax+by=c$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا كان $\text{pgcd}(|a|;|b|)$ يقسّم العدد c .

نعلم أن : $\text{pgcd}(3;21)=3$. بما أن العدد 3 يقسّم العدد 78 $(78=3\times 26)$

نستنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 5[7]$:

لدينا : $21y\equiv 0[7]$ و $78\equiv 1[7]$ وعليه نكتب المعادلة (E) كما يلي :

$3x\equiv 1[7]$ وحسب خواص الموافقة نكتب : $5\times 3x\equiv 5\times 1[7]$ أي : $15x\equiv 5[7]$

نستنتج أن : $x\equiv 5[7]$

- استنتاج حلول المعادلة (E) :

من : $x\equiv 5[7]$ نستنتج أن : $x=7k+5$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد :

$y=k-3$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $\begin{cases} x=7k+5 \\ y=k-3 \end{cases} (k\in\mathbb{Z})$

2 أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 :

بواقي القسمة الإقليدية لـ 5^n على 7 دورية ودورها 6 نلخصها في الجدول الآتي :

n	$6m$	$6m+1$	$6m+2$	$6m+3$	$6m+4$	$6m+5$
البواقي	1	5	4	6	2	3

(في هذا الجدول m عدد صحيح)

ب- تعيين الثنائيات $(x;y)$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق $5^x+5^y\equiv 3[7]$

نعلم أن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x\,;y)$ حيث : $\begin{cases} x=7k+5 \\ y=k-3 \end{cases} (k\in \mathbb{Z})$

في هذا السؤال $(x\,;y)\in \mathbb{N}^2$ وبالتالي $k-3\geq 0$ وبوضع $k'=k-3$ مع $k'\in \mathbb{N}$

تصبح حلول المعادلة (E) كما يلي : $\begin{cases} x=7k'+26 \\ y=k' \end{cases} (k'\in \mathbb{N})$

نعوض x و y في المعادلة $5^x+5^y\equiv 3\,[7]$ فنجد $5^{6(k'+4)+2}+5^{k'}\equiv 3\,[7]$

وبالتالي : $5^{k'}\equiv 6\,[7]$ وباستخدام بواقي قسمة 5^n على 7 نستنتج $k'=6m+4$

ومنه : $\begin{cases} x=42m+54 \\ y=6m+4 \end{cases} (m\in \mathbb{N})$ (يمكن الحصول على نفس النتيجة باتباع طرق أخرى)

التمرين 4 :

1 حساب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$:

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\lim_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty$$

• التفسير الهندسي لهذه النتيجة : المنحني (c) يقبل على يمين النقطة ذات الفاصلة 1 نصف مماس يوازي محور التراتيب .

• دراسة تغيّرات الدالة f :

- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

- من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ (الدالة f متزايدة تماما)

- جدول تغيرات الدالة f :

x	1 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $\quad$ $+$
$f(x)$	3 $\nearrow$ $+\infty$

• إنشاء المنحني (c) :

تذكير : التمثيل البياني للدالة $f:x\mapsto g(x+\lambda)+\lambda'$

إذا كان C_g و C_f التمثيلين البيانيين في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ للدالتين g و f على الترتيب فإن C_f هو صورة C_g بالانسحاب الذي شعاعه $-\lambda\vec{i}+\lambda'\vec{j}$.

(λ و λ' عددان حقيقيان)

لدينا : $f(x)=3+\sqrt{x-1}$ ومنه : $f(x)=g(x-1)+3$ حيث :
g هي الدالة " الجذر التربيعي "
نستنتج أن المنحني (c) هو صورة منحنى الدالة " الجذر التربيعي " بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(1;3)$.
2 أ- تمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل :
ننطلق من الفاصلة $u_0=2$ ، ترتيب النقطة من المنحني (c) الموافق لهذه الفاصلة يعطينا u_1 . نقوم بنقل العدد u_1 إلى محور الفواصل ومن أجل هذا ، نستعمل المستقيم (D) . وبالتالي فإن u_2 هو ترتيب النقطة من المنحني (c) ذات الفاصلة u_1 . نقوم بنقل العدد u_2 إلى محور الفواصل ومن أجل هذا ، نستعمل المستقيم (D)
ب- وضع تخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها :
المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى وبالتالي فهي متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (c) وَ (D) ، هذه الفاصلة توافق الحل l للمعادلة $f(x)=x$ ومنه : $l=5$
3 أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2\le u_n\le 5$:
نسمي p_n الخاصية " $2\le u_n\le 5$ "
• التحقق من صحة p_0 :
لدينا : $2\le u_0\le 5$ أي : $2\le 2\le 5$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة
• نفرض أن p_n صحيحة أي : $2\le u_n\le 5$ ،
ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $2\le u_{n+1}\le 5$
من فرضية التراجع : $2\le u_n\le 5$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$
نستنتج أن : $f(2)\le f(u_n)\le f(5)$ أي : $4\le u_{n+1}\le 5$ ومنه : $2\le u_{n+1}\le 5$
وعليه فإن : p_{n+1} صحيحة
طريقة أخرى : من فرضية التراجع : $2\le u_n\le 5$ وبإضافة العدد -1 إلى الحدود الثلاثة نجد : $1\le u_n-1\le 4$. وبما أن الدالة " الجذر التربيعي " متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ نستنتج أن : $1\le\sqrt{u_n-1}\le 2$ وبإضافة العدد 3 إلى الحدود الثلاثة نحصل على : $4\le 3+\sqrt{u_n-1}\le 5$ أي : $4\le u_{n+1}\le 5$ ومنه : $2\le u_{n+1}\le 5$ وعليه فإن : p_{n+1} صحيحة
• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $2\le u_n\le 5$.

* البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} > u_n$:

نسمي p_n الخاصية " $u_{n+1} > u_n$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_1 > u_0$ أي : $4 > 2$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض صحة p_n أي : $u_{n+1} > u_n$ ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $u_{n+2} > u_{n+1}$

من فرضية التراجع : $u_{n+1} > u_n$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$

نستنتج أن : $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ أي : $u_{n+2} > u_{n+1}$

ومنه : p_{n+1} صحيحة .

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} > u_n$.

ب- استنتاج أن (u_n) متقاربة :

لدينا : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} > u_n$ نستنتج أن (u_n) متزايدة تماما

ولدينا : من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $2 \leq u_n \leq 5$ نستنتج أن (u_n) محدودة من الأعلى

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة . (هذا ما يؤكد صحة المخمّنة السابقة) .

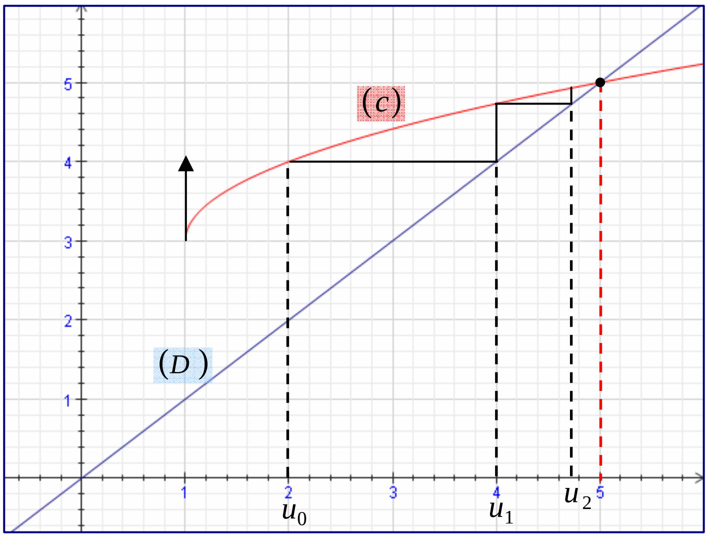
حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

نفرض أن (u_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي l ومنه : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$

من العلاقة : $u_{n+1} = f(u_n)$ نستنتج أن : $l = 3 + \sqrt{l-1}$ وبحل هذه المعادلة

نجد : $l = 5$.

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$



حل الموضوع الثاني

التمرين 1 :

1 إثبات أنه إذا كان a جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذر له أيضا :

a جذر لكثير الحدود $P(z)$ معناه : $P(a)=0$

ومنه : $2a^4-2ia^3-a^2-2ia+2=0 \quad \ldots (1)$

- من أجل $a=0$ نحصل على : $2=0$ وهذا مستحيل ، نستنتج أن $a\neq 0$.

- من أجل $a\neq 0$ وبقسمة طرفي المساواة (1) على العدد a^4 نحصل على :

$2-2i\times\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}-2i\times\frac{1}{a^3}+2\times\frac{1}{a^4}=0$ وبعد الترتيب نجد :

$2\left(\frac{1}{a}\right)^4-2i\left(\frac{1}{a}\right)^3-\left(\frac{1}{a}\right)^2-2i\left(\frac{1}{a}\right)+2=0$ ومنه : $P\left(\frac{1}{a}\right)=0$

إذن : إذا كان a جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذر له أيضا .

2 التحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$: $P(1+i)=0$

$1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ معناه : $P(1+i)=0$

3 حل المعادلة $P(z)=0$: العددان $1+i$ و $\frac{1}{1+i}$ جذران لـ $P(z)$ وبالتالي

يمكن كتابته على الشكل : $P(z)=[z-(1+i)]\left[z-\left(\frac{1}{1+i}\right)\right]\left(2z^2+\alpha z+\beta\right)$

وبعد النشر والترتيب والمطابقة مع $P(z)=2z^4-2iz^3-z^2-2iz+2$

نجد : $\alpha=3-i$ و $\beta=2$

ومنه : $P(z)=[z-(1+i)]\left[z-\left(\frac{1}{1+i}\right)\right]\left(2z^2+(3-i)z+2\right)$

مميز المعادلة $2z^2+(3-i)z+2=0$ هو : $\Delta=-8-6i=(1-3i)^2$

نستنتج أن حلي المعادلة $2z^2+(3-i)z+2=0$ هما : $-1+i$ و $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

إذن : حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $1+i$ ، $-1+i$ ، $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ و $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

④ كتابة الحلول على الشكل الأسي :

- $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$
- $-1+i=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}(1-i)=\frac{1}{2}\left(\overline{1+i}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$
- $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}(-1-i)=\frac{1}{2}\left(\overline{-1+i}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

⑤ تعيين m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا :

يكون الرباعي $ABCD$ مربعا إذا وفقط إذا كان متوازي أضلاع وكان قطراه $[AC]$ و $[BD]$ متناصفين ومتعامدين .

- الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع معناه : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ومنه : $Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_{\overrightarrow{DC}}$

[$Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_{\overrightarrow{DC}}$] يكافئ [$-2=-m$] ومنه : $m=2$

- $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان معناه : $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$

وبالتالي : $\frac{1+i-\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i}{2}=\frac{-1+i+\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i}{2}$ ومنه : $m=2$

- $[AC]$ و $[BD]$ متعامدان معناه : $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ ومنه : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

لدينا : $\overrightarrow{AC}\left(-\frac{m}{2}-1;-\frac{m}{2}-1\right)$ و $\overrightarrow{BD}\left(\frac{m}{2}+1;-\frac{m}{2}-1\right)$

[$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$] يكافئ [$\left(-\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m}{2}+1\right)+\left(-\frac{m}{2}-1\right)\left(-\frac{m}{2}-1\right)=0$]

وبما أن : $-\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{m}{2}+1\right)+\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{m}{2}+1\right)=-\left(\frac{m}{2}+1\right)^2+\left(\frac{m}{2}+1\right)^2=0$

نستنتج أن القطرين $[AC]$ و $[BD]$ متعامدان مهما كان العدد الحقيقي غير المعدوم m

إذن : يكون الرباعي $ABCD$ مربعا من أجل $m=2$.

ملاحظة : توجد طرق أخرى باستعمال شروط أخرى حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا .

مثلا : يكون الرباعي $ABCD$ مربعا إذا كان متوازي أضلاع وفيه ضلعين متتابعين متعامدين ومتقايسين .

التمرين 2 :

(1) حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

$u_1=\frac{7}{3}$ ، $u_2=\frac{23}{9}$ و $u_3=\frac{73}{27}$

(2) البرهان بالتراجع أن (v_n) متتالية ثابتة :

تذكير : [المتتالية (v_n) ثابتة] يكافئ [من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}-v_n=0$]

نسمي p_n الخاصية " $v_{n+1}-v_n=0$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $v_0=u_0+\left(\frac{2}{3}\right)^0=2+1=3$ و $v_1=u_1+\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{7}{3}+\frac{2}{3}=\frac{9}{3}=3$

من أجل $n=0$: $v_1-v_0=3-3=0$ ، وهي محققة. إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $v_{n+1}-v_n=0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $v_{n+2}-v_{n+1}=0$

لدينا : $v_{n+2}=u_{n+2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$ و $v_{n+1}=u_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

ومنه :

$$\begin{aligned}
v_{n+2}-v_{n+1}&=\left[u_{n+2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right]-\left[u_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]\\
&=\left[\frac{2}{3}u_{n+1}+1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right]-\left[\frac{2}{3}u_n+1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]\\
&=\frac{2}{3}\left[u_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]-\frac{2}{3}\left[u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]\\
&=\frac{2}{3}v_{n+1}-\frac{2}{3}v_n=\frac{2}{3}\left(v_{n+1}-v_n\right)
\end{aligned}$$

ومن فرضية التراجع : $v_{n+1}-v_n=0$ وبالتالي : $v_{n+2}-v_{n+1}=\frac{2}{3}\times 0=0$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=v_n$ وبالتالي فإن المتتالية (v_n) ثابتة

• استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

بما أن المتتالية (v_n) ثابتة فإن $v_n=v_{n-1}=\cdots=v_1=v_0=3$

من العلاقة : $v_n=u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$ نستنتج أن : $u_n=v_n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$ إذن : $u_n=3-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

• حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

تذكير : إذا كان $-1<q<+1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$

3 حساب المجموع S :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n=\frac{2}{3}n-\left(\frac{2}{3}\right)^n=x_n+y_n$ حيث :

• $x_n=\frac{2}{3}n$ ، (x_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{2}{3}$ وحدّها الأول $x_0=0$

• $y_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، (y_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدّها الأول $y_0=-1$

وبالتالي فإن المجموع S هو مجموع مجموعين (مجموع حدود متتالية حسابية + مجموع حدود متتالية هندسية)

إذن : $S=\frac{n(n+1)}{3}+3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right]$

التمرين 3 :

1 إثبات أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي :

$\vec{u}\left(1;\frac{1}{2};-2\right)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\vec{u'}(1;-2;1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ') . الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطيا (لا يوجد عدد حقيقي t بحيث $\vec{u'}=t\vec{u}$)

نستنتج أن المستقيمين (Δ) و (Δ') إما من نفس المستوي ومتقاطعان ، وإما ليسا من نفس المستوي . لنبيّن أن المستقيمين (Δ) و (Δ') غير متقاطعين :

للبحث عن نقط تقاطع (Δ) و (Δ') نقوم بحل الجملة :

$$\begin{cases} 3+\lambda & =6+\alpha \\ 2+\frac{1}{2}\lambda & =1-2\alpha \\ -2-2\lambda & =5+\alpha \end{cases}$$

من المعادلة الأولى والثانية نجد : $(\alpha;\lambda)=(-1;2)$ وبالتعويض في المعادلة الثالثة نحصل على المساواة : $-6=4$ وهذا مستحيل .

نستنتج أن المستقيمين (Δ) و (Δ') غير متقاطعين .

إذن : المستقيمان (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .

② M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (Δ') .

أ- تعيين إحداثيات النقطتين M و N :

لدينا : $\overrightarrow{MN}\left(\alpha-\lambda+3;-2\alpha-\frac{1}{2}\lambda-1;\alpha+2\lambda+7\right)$

$[(MN)\perp(\Delta)]$ يكافئ $[\ \overrightarrow{MN}.\vec{u}=0\ ]$ ومنه : $8\alpha+21\lambda+46=0$

$[(MN)\perp(\Delta')]$ يكافئ $[\ \overrightarrow{MN}.\vec{u'}=0\ ]$ ومنه : $3\alpha+\lambda+6=0$

وبحل الجملة : $\begin{cases}8\alpha+21\lambda+46=0\\3\alpha+\lambda+6=0\end{cases}$ نجد : $\lambda=-\frac{18}{11}$ و $\alpha=-\frac{16}{11}$

نستنتج أن : $M\left(\frac{15}{11};\frac{13}{11};\frac{14}{11}\right)$ و $N\left(\frac{50}{11};\frac{43}{11};\frac{39}{11}\right)$

ب- حساب الطول MN :

تذكير : $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

$$MN=\sqrt{\frac{2725}{121}}=\frac{5\sqrt{110}}{11}$$

③ تعيين معادلة المستوي (P) :

الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ هما شعاعان مستقلان خطيا و هما شعاعا توجيه للمستوي (P)

• إذا كان $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P) فإن : $\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{n}\\\vec{u'}\perp\vec{n}\end{cases}$

ومنه : $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\\vec{u'}.\vec{n}=0\end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases}a+\frac{1}{2}b-2c=0\\a-2b+c=0\end{cases}$

وبحل هذه الجملة مع فرض $c=5$ نحصل على $\vec{n}(7;6;5)$

تكون عندئذ معادلة المستوي (P) من الشكل $7x+6y+5z+d=0$

ولدينا : $A(3;2;-2)\in(\Delta)$ نستنتج أن : $A(3;2;-2)\in(P)$

وبالتالي : $7\times3+6\times2+5\times(-2)+d=0$ ومنه : $d=-23$

إذن : معادلة المستوي (P) هي $7x+6y+5z-23=0$

④ حساب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') والمستوي (P) :

تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث :

$$\boxed{d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

إذن : $d=\frac{|7(6+\alpha)+6(1-2\alpha)+5(5+\alpha)-23|}{\sqrt{7^2+6^2+5^2}}=\frac{50}{\sqrt{110}}\times\frac{\sqrt{110}}{\sqrt{110}}=\frac{5\sqrt{110}}{11}$

نلاحظ أن : $d=MN$

التمرين 4 :

الجزء I :

① دراسة تغيرات الدالة f :

- مجموعة التعريف : الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$
- النهايات : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- المشتقة : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=1-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$
- إشارة المشتقة : $[f'(x)=0]$ يكافئ $[e^x-1=0]$ ومنه : $x=0$ و $f(0)=1$

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x)>0$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1	↗ $+\infty$

② تبيان أن C_f يقبل نقطة انعطاف ω :

تذكير : إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح يشمل x_0 وإذا انعدمت دالتها المشتقة الثانية من أجل x_0 مغيرة إشارتها فإن النقطة $M_0(x_0\,;f(x_0))$ هي نقطة انعطاف للمنحني الممثل للدالة f .

لدينا : $f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ومنه : $f''(x)=\frac{4e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$

الدالة f'' تنعدم من أجل $x_0=0$ مغيرة إشارتها نستنتج أن النقطة $\omega(0\,;f(0))$

أي : $\omega(0;1)$ هي نقطة انعطاف للمنحني C_f .

• كتابة معادلة لمماس C_f عند النقطة ω :

تذكير : معادلة المماس عند النقطة $A(x_0 ; f(x_0))$ من الشكل :

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

إذن : معادلة لمماس C_f عند النقطة ω هي : $y=1$

• إثبات أن ω مركز تناظر للمنحني C_f :

تذكير : تكون النقطة $\omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر للمنحني C_f اذا وفقط إذا كان :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $2\alpha-x\in\mathbb{R}$ و $f(x)+f(2\alpha-x)=2\beta$

وعليه : تكون $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحني C_f إذا وفقط إذا كان :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$ و $f(x)+f(-x)=2$

واضح أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$ و $f(x)+f(-x)=\dots=2$

إذن : $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحني C_f .

③ حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x+1}=0$

• حساب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$: $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{4}{e^x+1}-4\right]=0$

• الاستنتاج :

تذكير : إذا كانت f دالة حيث $f(x)=ax+b+g(x)$ وكانت $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$

فإن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f .

(نفس الملاحظة لما يؤول x إلى $-\infty$)

نستنتج أن C_f يقبل مستقيمين مقاربين معادلتاهما $y=x-1$ و $y=x+3$

④ تبيان أن C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2.77;-2.76[$:

تذكير بمبرهنة القيم المتوسطة : إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$

وكان $f(a)\times f(b)<0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b

بحيث $f(c)=0$.

وإذا كانت الدالة f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ يكون العدد c وحيدا .

f مستمرة ومتزايدة تماما على $[-2.77;-2.76]$ و $f(-2.77)\times f(-2.76)<0$

نستنتج أن المنحني C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 .

• حساب $f(1)$ و $f(-1)$: $f(1)=1.08$ و $f(-1)=0.92$

• الرسم : انظر الشكل

الجزء II :

1 تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x)=f(-x)$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(-x)=-x-1+\dfrac{4}{e^{-x}+1}=-x-1+\dfrac{4}{\dfrac{1}{e^{x}}+1}$

$$=-x-1+\dfrac{4}{\dfrac{1+e^{x}}{e^{x}}}=-x-1+4\times\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$$

$$=-x-1+\dfrac{4e^{x}}{e^{x}+1}=g(x)$$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x)=f(-x)$

• الاستنتاج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول C_f إلى C_g .

من السؤال السابق نستنتج أن المنحني C_g هو صورة المنحني C_f بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .

2 رسم المنحني C_g : انظر الشكل