بكالوريا 2011 . الشعبة : رياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4.5 نقطة)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.
A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب :
$z_A=1-i$ ، $z_B=-1+i$ و $z_C=\sqrt{3}(1+i)$.

1) اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة : z_A ، z_B و z_C .

2) أ- احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، ثم فسّر هندسيا النتائج المحصل عليها .

ب- حدّد طبيعة المثلث ABC .

3) عيّن لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معيّنا .

4) T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=(-1+i)z+1-3i$.

أ- عيّن طبيعة التحويل T وعناصره المميزة .

ب- استنتج طبيعة التحويل $T\circ T$ وعناصره المميزة .

التمرين الثاني : (4.5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) نعتبر النقط : $A(1;0;2)$ ، $B(1;1;4)$ و $C(-1;1;1)$.

أ- أثبت أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا .

ب- بيّن أن الشعاع $\vec{n}(3;4;-2)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) حيث :

$(P_1): 3x+4y-2z+1=0$ و $(P_2): 2x-2y-z-1=0$

أ- بيّن أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان .

ب- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) .

جـ- تحقق أن النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى (Δ) .

د- احسب المسافتين $d\left(O\,;(P_1)\right)$ و $d\left(O\,;(P_2)\right)$ واستنتج المسافة $d\left(O\,;(\Delta)\right)$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق :

$$\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases} \quad \text{حيث :} \quad \begin{cases} m = PPCM\,(u_3\,;u_5) \\ d = PGCD\,(u_3\,;u_5) \end{cases}$$

1) عيّن الحدّين u_3 و u_5 ثم استنتج u_0 .

2) اكتب u_n بدلالة n ، ثم بيّن أن : 2010 حد من حدود (u_n) وعيّن رتبته .

3) عيّن الحدّ الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080

4) n عدد طبيعي غير معدوم .

أ- احسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n}$.

ب- استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث :

$S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}$ و $S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1}$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (3x+4)e^x$.

(c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ- احسب f' ، f'' ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$ حيث : f' ، f'' ، ... ، $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f .

ب- استنتج حل المعادلة التفاضلية : $y'' = (3x+16)e^x$

2) أ- بيّن أن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ وفسّر هذه النتيجة هندسيا .

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيّراتها .

3) أ- اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (c_f) في النقطة ω التي فاصلتها $-\dfrac{10}{3}$.

ب- بيّن أن ω هي نقطة انعطاف للمنحنى (c_f) .

جـ- ارسم (Δ) و (c_f) على المجال $]-\infty;0]$.

4) أ- x عدد حقيقي من المجال $]-\infty;0]$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^{x} te^t dt$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$.

ب- λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$.

احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحني (c_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=-\frac{4}{3}$ و $x=\lambda$ ثم جد $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

1) نعتبر المعادلة: $(E)\ \dots\ 13x-7y=-1$ حيث : x و y عددان صحيحان.

حل المعادلة (E) .

2) عيّن الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث : $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$

3) ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13 .

4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 9 كما يلي : $\overline{\alpha 00 \beta 086}$ حيث : α و β عددان طبيعيان مع $\alpha \neq 0$.

عيّن α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91 .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط : $A(1;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ ، $C(0;0;3)$ و $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)$

(D) المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1;1;\frac{3}{2}\right)$

و (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C وشعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{1}{2};1;-3\right)$

1) اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (D) و (Δ) ثم ادرس الوضع النسبي لهما

2) بيّن أن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ ، ما ذا تستنتج بالنسبة للنقطة G ؟

3) عيّن شعاعا ناظميا $\vec{n}$ للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة له .

4) احسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) .

5) H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D) .

أ- جد إحداثيات النقطة H .

ب- استنتج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D) .

التمرين الثالث : (4 نقطة)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية :

1) أ- الشكل المثلثي للعدد المركب $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ هو $-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

ب- $a^{2011}+\overline{a}=0$ حيث : $\overline{a}$ مرافق a .

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$:

أ- التحويل T الذي كتابته المركبة $z'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم .

ب- مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z-i)=-\frac{\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ذات اللاحقة i وشعاع توجيهه $\vec{w}$ لاحقته $1+i$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ :

$u_0=\frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{6}$.

أ- $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$

ب- (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- (u_n) متباعدة .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

1) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0\,;\,+\infty[$ بـ :

$$g(x)=x^2+\ln x^2-1$$

أ- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكل جدول تغيّراتها .

ب- احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0\,;\,+\infty[$.

2) f الدالة المعرفة على المجال $]0\,;\,+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\ln x$.

و (c_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ- بيّن أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0\,;\,+\infty[$ وأن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$.

- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيّراتها .

ب- (δ) المنحني الممثل للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0\,;\,+\infty[$.

- ادرس وضعية (c_f) بالنسبة إلى (δ) ثم جد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\ln x$ ، ما ذا تستنتج؟

- ارسم (δ) و (c_f) .

3) أ- x عدد حقيقي من المجال $[1\,;\,+\infty[$.

باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\,dt$.

- تحقق أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $[1\,;\,+\infty[$

- استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $[1\,;\,+\infty[$.

ب- α عدد حقيقي أكبر تماما من 1 .

احسب بدلالة α المساحة $\mathrm{A}(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (c_f) و (δ)

والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=\alpha$ ، ثم احسب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathrm{A}(\alpha)$.