بكالوريا 2010 . الشعبة : رياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

1 نعتبر المعادلة : $(1)\ \dots\ 7x+65y=2009$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ- بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7 .

ب- حل المعادلة (1) .

2 ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9 .

3 عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9 .

4 نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{6n}-1$.

أ- تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9 .

ب- حل المعادلة : $(2)\ \dots\ (7u_1)x+(u_2)y=126567$ ذات المجهول $(x\,;y)$ حيث x و y عددان صحيحان .

جـ- عيّن الثنائية $(x\,;y)$ حل (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع $y_0\geq 25$.

التمرين الثاني : (4.5 نقطة)

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط :

$A(2;0;0)$ ، $B(0;1;0)$ و $C(0;0;2)$.

1 بيّن أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

2 جد معادلة للمستوي (ABC) .

3 جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) .

4 (P) المستوي الذي معادلته : $2x+2y+z-2=0$.

أ- بيّن أن المستويين (P) و (ABC) متقاطعان .

ب- بيّن أن المستوي (P) يشمل النقطتين B و C ، ماذا تستنتج ؟

5 عيّن (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

التمرين الثالث : (4.5 نقطة)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3-3z^2+3z-9=0 \ ...(E)$

1 أ- تحقق أن 3 حل للمعادلة (E) ، ثم عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث

من أجل كل عدد مركب z ، $z^3-3z^2+3z-9=(z-3)(az^2+bz+c)$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2 في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط

A ، B و C صور الأعداد المركبة $z_A=3$ ، $z_B=i\sqrt{3}$ و $z_C=-i\sqrt{3}$.

بيّن أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

3 D النقطة التي لاحقتها $z_D=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و E صورتها بالدوران الذي مركزه O

وزاويته $\frac{\pi}{3}$. عيّن z_E لاحقة النقطة E .

4 F النقطة التي لاحقتها $z_F=1-i\sqrt{3}$.

أ- احسب $\frac{z_F}{z_E}$ واستنتج أن المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان .

ب- عيّن z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا .

التمرين الرابع : (7 نقطة)

I- g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(3-x)e^x-3$.

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2 بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث

$2.82<\alpha<2.83$.

3 استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1} \ ; \ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أ- بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$.

ب- اكتب معادلة لــ (T) مماس المنحني (C_f) عند المبدأ O .

2 أ- بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-x} = 0$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنه من أجل $x \neq 0$ فإن $f'(x)=\dfrac{x^2}{(e^x-1)^2}\, g(x)$.

جـ- تحقق أن $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$ ثم عيّن حصرا له .

د- أنشئ جدول تغيّرات الدالة f .

3 أ- احسب $f(x)+x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لــ (C_f) و (C) منحني الدالة $x \mapsto -x^3$.

ب- بيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x^3\right)=0$ وفسّر النتيجة هندسيا .

4 أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين (C) و (C_f) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

1. برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13 .
2. استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كل من العددين $3^{3n+1}-3$ و $3^{3n+2}-9$ القسمة على 13 .
3. عيّن ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 ، واستنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13 .
4. نضع ، من أجل كل عدد طبيعي p ، $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$.

أ- من أجل $p=3n$ ، عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 .

ب- برهن أنه إذا كان $p=3n+1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

جـ- عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p=3n+2$.

5. يكتب العددان الطبيعيان a و b في نظام العدّ ذي الأساس 3 كما يلي :

$a=\overline{1001001000}$ و $b=\overline{1000100010000}$

أ- تحقق أن العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري .

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13 .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. نسمي A ، B و I النقط التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=1-4i$ ، $z_B=-1-2i$ و $z_I=1-2i$

أ- علم النقط A ، B و I .

ب- اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $Z=\dfrac{z_I-z_A}{z_I-z_B}$.

جـ- ما هو نوع المثلث IAB ؟

د- C صورة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .

- احسب اللاحقة z_C للنقطة C .

هـ- D مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$.

- احسب اللاحقة z_D للنقطة D .

و- بيّن أن $ABCD$ مربع .

2 عيّن وأنشئ (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|$$

3 عيّن وأنشئ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=1$$

التمرين الثالث : (4 نقاط)

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط :
$A(-1;2;1)$ ، $B(2;1;3)$ و $C(0;-1;2)$ ، ولتكن (P) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $AM=BM$.

1 بيّن أن (P) هو المستوي الذي معادلته : $3x-y+2z-4=0$.

2 عيّن معادلة للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A ويوازي المستوي (P) .

3 أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل C ويعامد (P) .

ب- عيّن إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D) .

جـ- احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) .

4 عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (π) الذي يحوي المستقيم (AC) ويعامد المستوي (P) ، ثم استنتج معادلة له .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x-1-2\ln x$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول هي $4\,cm$.

1 احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا .

2 أ- بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

ب- ادرس تغيرات الدالة g .

جـ- احسب $g(1)$.

د- برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α حيث $3.5<\alpha<3.6$

هـ- استنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

3 f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + x^2 \ln x \; ; \; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

أ- احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة هندسيا .

ب- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

جـ- بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن $f'(x) = x\, g\left(\frac{1}{x}\right)$

- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f .

د- شكل جدول تغيّرات الدالة f .

- بيّن أن : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2}$ واستنتج حصرا للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

4 ارسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f على المجال $[0;3]$.