

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

- 1 نعتبر المعادلة : (1) $7x + 65y = 2009$... حيث x و y عدنان صحيحان .
أ- بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7 .
ب- حل المعادلة (1) .
- 2 ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9 .
- 3 عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9 .
- 4 نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{6n} - 1$.
أ- تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9 .
ب- حل المعادلة : (2) $(7u_1)x + (u_2)y = 126567$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عدنان صحيحان .
ج- عيّن الثنائية $(x; y)$ حل (2) حيث x_0 و y_0 عدنان طبيعيين مع $y_0 \geq 25$.

التمرين الثاني : (4.5 نقطة)

- في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط :
- $A(2; 0; 0)$ ، $B(0; 1; 0)$ و $C(0; 0; 2)$.
- 1 بيّن أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .
 - 2 جد معادلة للمستوي (ABC) .
 - 3 جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) .
 - 4 (P) المستوي الذي معادلته : $2x + 2y + z - 2 = 0$.
أ- بيّن أن المستويين (P) و (ABC) متقاطعان .
ب- بيّن أن المستوي (P) يشمل النقطتين B و C ، ماذا تستنتج ؟
 - 5 عيّن (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :
$$\| \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \| = \| 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} \|$$

التمرين الثالث : (4.5 نقطة)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة : $(E) \dots z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = 0$...
1 أ- تحقق أن 3 حل للمعادلة (E) ، ثم عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث
من أجل كل عدد مركب z ، $z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = (z - 3)(az^2 + bz + c)$ ،
ب- حل في \mathbb{C} المعادلة (E) .

2 في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط
 A ، B و C صور الأعداد المركبة $z_A = 3$ ، $z_B = i\sqrt{3}$ و $z_C = -i\sqrt{3}$.
بيّن أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

3 D النقطة التي لاحقها $z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و E صورتها بالدوران الذي مركزه O
وزاويته $\frac{\pi}{3}$. عيّن z_E لاحقة النقطة E .

4 F النقطة التي لاحقها $z_F = 1 - i\sqrt{3}$.

أ- احسب $\frac{z_F}{z_E}$ واستنتج أن المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان .

ب- عيّن z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعاً .

التمرين الرابع : (7 نقطة)

I- g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = (3 - x)e^x - 3$.

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2 بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في \mathbb{R} حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث

$$2.82 < \alpha < 2.83$$

3 استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$; $x \neq 0$
 $f(0) = 0$

نسمة (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أ- بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$.

ب- اكتب معادلة لـ (T) مماس المنحني (C_f) عند المبدأ O .

2 أ- بيّن أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنه من أجل $x \neq 0$ فإن $f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x)$.

ج- تحقق أن $f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$ ثم عيّن حصره.

د- أنشئ جدول تغيّرات الدالة f .

3 أ- احسب $f(x) + x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى

الدالة $x \mapsto -x^3$.

ب- بيّن أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x^3) = 0$ وفسّر النتيجة هندسياً.

4 أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين (C) و (C_f) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

- 1 برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 13 .
- 2 استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كل من العددين $3^{3n+1} - 3$ و $3^{3n+2} - 9$ القسمة على 13 .
- 3 عيّن ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 ، واستنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13 .
- 4 نضع ، من أجل كل عدد طبيعي p ، $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$ ،
أ- من أجل $p = 3n$ ، عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 .
ب- برهن أنه إذا كان $p = 3n + 1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13 .
ج- عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p = 3n + 2$.
- 5 يكتب العددان الطبيعيان a و b في نظام العدّ ذي الأساس 3 كما يلي :
 $a = \overline{1001001000}$ و $b = \overline{1000100010000}$
أ- تحقق أن العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري .
ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13 .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

- 1 المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
أ- علمي A ، B و I النقط التي لواحقها على الترتيب :
 $z_I = 1 - 2i$ و $z_B = -1 - 2i$ ، $z_A = 1 - 4i$.
- ب- اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$.
ج- ما هو نوع المثلث IAB ؟
د- صورة C صورة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .
- احسب اللاحقة z_C للنقطة C .
هـ- D مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$.
- احسب اللاحقة z_D للنقطة D .
و- بيّن أن $ABCD$ مربع .

2 عيّن وأنشئ (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{MA} + \vec{MC}\|$$

3 عيّن وأنشئ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 1$$

التمرين الثالث : (4 نقاط)

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط :
 $A(-1; 2; 1)$ ، $B(2; 1; 3)$ و $C(0; -1; 2)$ ، ولتكن (P) مجموعة النقط
 M من الفضاء بحيث : $AM = BM$.

1 بيّن أن (P) هو المستوي الذي معادلته : $3x - y + 2z - 4 = 0$.

2 عيّن معادلة للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A ويوازي المستوي (P) .

3 أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل C ويعامد (P) .

ب- عيّن إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D) .

ج- احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) .

4 عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (π) الذي يحوي المستقيم (AC) ويعامد
المستوي (P) ، ثم استنتج معادلة له .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

g الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x - 1 - 2\ln x$ و (C_g)
تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
وحدة الطول هي 4 cm .

1 احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا .

2 أ- بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

ب- ادرس تغيرات الدالة g .

ج- احسب $g(1)$.

د- برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α حيث $3.5 < \alpha < 3.6$.

هـ- استنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) f الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + x^2 \ln x ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة هندسيا .

ب- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ج- بيّن أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن $f'(x) = x g\left(\frac{1}{x}\right)$

- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f .

د- شكل جدول تغيّرات الدالة f .

- بيّن أن : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2}$ واستنتج حصر العدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

4) ارسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f على المجال $[0; 3]$.