بكالوريا 2009 . الشعبة : رياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي .

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل $A=\overline{5566}$.

① أ- أنشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$ ثم أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أن $A=(5x^2+6)(2+2y)$.

ب- احسب x و y إذا علمت أن x عدد أوّلي أصغر من 12 ، ثم اكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري .

② أ- عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584 .

ب- عيّن الأعداد الطبيعية a و b حيث $a>b$ التي تحقق : $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$

التمرين الثاني : (5 نقاط)

كيس به 10 كريات متماثلة لا نميّز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء .

① نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في أن واحد .

أ- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء .

ب- احسب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء .

② ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

- عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

③ نسحب من الكيس في آن واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي وبإرجاع .

- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط .

التمرين الثالث : (5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقطتين $A(2;1;2)$ ، $B(0;2;-1)$ والمستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=2t \end{cases}$$

① أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

ب- أثبت أن (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي .

② نعتبر المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (AB) ويوازي المستقيم (D) .

أ- بيّن أن الشعاع $\vec{n}(1;5;1)$ عمودي على المستوي (P) .

ب- اكتب معادلة للمستوي (P) .

جـ- بيّن أن المسافة بين نقطة M من (D) والمستوي (P) مستقلة عن موضع M.

د- عيّن تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستوي (P) مع المستوي (yoz) .

التمرين الرابع: (6 نقاط)

① نعرّف الدالة العددية f على المجال $[1;5]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(الوحدة على المحورين $3cm$) .

أ- ادرس تغيرات الدالة f .

ب- أنشئ المنحني (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ في نفس المعلم .

② نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=5$ وبالعبارة

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{5}{u_n}\right)$$

أ- احسب u_1 و u_2 .

ب- استعمل المنحني (C) والمستقيم (Δ) لتمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل .

③ أ- برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\geq\sqrt{5}$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما . ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (u_n)؟

④ أ- برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-\sqrt{5}\leq\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$.

ب- استنتج أن $u_n-\sqrt{5}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)$. ما هي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ؟

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب $f(z)$ حيث $f(z)=\frac{z-i}{z-1}$

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(45+45i)f(z)=23+45i-2z$$

2 لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أ- عيّن مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا تماما .

ب- احسب العدد المركب z_0 بحيث يكون $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\frac{3\pi}{2}$

3 في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : 1 ، i و z_0 .

أ- ما نوع المثلث ABC ؟

ب- عيّن النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) واستنتج طبيعة الرباعي $ACBD$.

التمرين الثاني : (5 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=3u_n+2n+1$$

(v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n=u_n+\alpha n+\beta$

حيث α و β عددان حقيقيان .

1 عيّن α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها وحدّها الأول .

2 احسب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

3 احسب المجموعين S_n و S'_n حيث :

$$S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n \quad \text{و} \quad S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$$

4 أ- عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها u_n مضاعفا للعدد 5 .

التمرين الثالث : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) حيث : $x+2y-z-2=0$ معادلة للمستوي (P_1)

و $\begin{cases} x=1+2\alpha+\beta \\ y=1+\alpha \\ z=5+\alpha+\beta \end{cases} ;(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ تمثيل وسيطي للمستوي (P_2)

1) اكتب معادلة للمستوي (P_2) .

2) عيّن شعاعا ناظميا $\vec{n_1}$ للمستوي (P_1) وشعاعا ناظميا $\vec{n_2}$ للمستوي (P_2) .

3) بيّن أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان .

4) أ- $A(3;1;1)$ نقطة من الفضاء . احسب المسافة d_1 بين النقطة A والمستوي (P_1) ثم المسافة d_2 بين النقطة A والمستوي (P_2) .

ب- استنتج المسافة d_3 بين النقطة A والمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2)

5) أ- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) بدلالة الوسيط الحقيقي λ .

ب- M نقطة كيفية من (Δ) . احسب AM^2 بدلالة λ مستنتجا ثانية المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) ادرس تغيّرات الدالة f .

2) أ- بيّن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته $y=x$.

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) .

3) أ- بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $1.3<x_0<1.4$.

ب- عيّن معادلة (Δ) مماس للمنحنى (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

جـ- ارسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم .

4 أوجد الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغيّر x .

5 g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة $g(x)=|f(x)|$

(C_g) منحني الدالة g في المعلم السابق .

- بيّن كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق .

6 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $g(x)=m^2$