بكالوريا 2008 . الشعبة : رياضيات

الموضوع الأول

تمرين 1 : (5 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب .

1) اكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه O ويحوّل A إلى B ثم عيّن زاويته ونسبته .

2) نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يلي : $A_0=A$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $A_{n+1}=S(A_n)$. نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n .

أ- أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 ، A_1 و A_2 .

ب- برهن أن : $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

جـ- عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى (OA_1)

3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

$u_0=A_0A_1$ و $u_n=A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ- بيّن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدّها الأول u_0 وأساسها q .

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ- احسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

تمرين 2 : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(0;2;1)$ ، $B(-1;1;-3)$ و $C(1;0;-1)$.

1) اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة S التي مركزها C وتشمل النقطة A .

2) ليكن المستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=1+2\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R}) \\ z=-3+2\lambda \end{cases}$

أ- اكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة C ويعامد المستقيم (D) .

ب- احسب المسافة بين النقطة C والمستقيم (D) .

جـ- ما ذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم (D) وسطح الكرة S ؟

تمرين 3 : (5 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $3x-21y=78$

1 أ- بيّن أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 5[7]$

- استنتج حلول المعادلة (E) .

2 أ- ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

ب- عيّن الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق :

$$5^x+5^y\equiv 3[7]$$

تمرين 4 : (6 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=3+\sqrt{x-1}$

يرمز (c) إلى منحنى f في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(الوحدة على المحورين $2\,cm$) .

1 احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ وفسّر النتيجة هندسيا .

- ادرس تغيّرات الدالة f .

- باستعمال منحنى الدالة " الجذر التربيعي " ، أنشئ المنحنى (c) .

- ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$.

2 نعرّف المتتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

أ- باستعمال (D) و (c) ، مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل .

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها .

3 أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$2\le u_n\le 5 \quad \text{و} \quad u_{n+1}>u_n$$

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة . احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

الموضوع الثاني

تمرين 1 : (5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي :

$$P(z)=2z^4-2iz^3-z^2-2iz+2$$

① بيّن أنه إذا كان a جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذر له أيضا .

② تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.

③ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

④ اكتب الحلول على الشكل الأسي .

⑤ لتكن A ، B ، C و D النقط من المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ والتي لاحقاتها على الترتيب : $1+i$ ، $-1+i$ ، $\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$ و $-\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$ حيث m عدد حقيقي غير معدوم .

- عيّن m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا .

تمرين 2 : (4 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1$$

① احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

② (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$

- برهن بالتراجع أن (v_n) متتالية ثابتة .
- استنتج عبارة u_n بدلالة n .
- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

③ (w_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ : $w_n=\frac{2}{3}n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

- احسب المجموع S حيث : $S=w_0+w_1+w_2+\dots+w_n$

تمرين 3 : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر

المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين :

$\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\frac{1}{2}\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases} (\lambda\in\mathbb{R})$ و $\begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases} (\alpha\in\mathbb{R})$ على الترتيب .

1. بيّن أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .
2. M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (Δ') .

أ- عيّن إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (Δ') .

ب- احسب الطول MN .

3. عيّن معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .
4. احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') والمستوي (P) . ما ذا تلاحظ ؟

تمرين 4 : (7 نقاط)

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x-1+\dfrac{4}{e^x+1}$

C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. ادرس تغيرات الدالة f .
2. بيّن أن C_f يقبل نقطة انعطاف ω واكتب معادلة لمماس C_f عند النقطة ω .

- أثبت أن ω مركز تناظر للمنحني C_f .

3. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$.

- استنتج أن C_f يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما .

4. بيّن أن C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2.77;-2.76[$.

- احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدوّر النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم C_f ومستقيميه المقاربين .

II) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=-x+3-\dfrac{4}{e^x+1}$

وَ C_g منحنى الدالة g .

1. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x)=f(-x)$.

- استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول C_f إلى C_g .

2. أنشئ المنحني C_g في نفس المعلم السابق (دون دراسة الدالة g)