

الموضوع الأول

تمرين 1 : (5 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما $\sqrt{3} - i$ و $\sqrt{3} + 3i$ على الترتيب .

1 اكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه O ويحول A إلى B ثم عيّن زاويته ونسبته .

2 نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يلي : $A_0 = A$ ، ومن أجل كل

عدد طبيعي n ، $A_{n+1} = S(A_n)$. نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n .

أ- أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 ، A_1 ، و A_2 .

ب- برهن أن : $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}$

ج- عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى (OA_1)

3 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

أ- بيّن أن $u_0 = A_0 A_1$ و $u_n = A_n A_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- احسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

تمرين 2 : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(0; 2; 1)$ ، $B(-1; 1; -3)$ و $C(1; 0; -1)$.

1 اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة S التي مركزها C وتشمل النقطة A .

2 ليكن المستقيم (D) المعروف بالتمثيل الوسيطى : $\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$

أ- اكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة C ويعامد المستقيم (D) .

ب- احسب المسافة بين النقطة C والمستقيم (D) .

ج- ما ذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم (D) و سطح الكرة S ؟

تمرين 3 : (5 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $3x - 21y = 78$

1) أ- بيّن أن (E) تقبل حلولاً في \mathbb{Z}^2 .

ب- أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 5 [7]$.
- استنتج حلول المعادلة (E) .

2) أ- ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

ب- عيّن الثنائيات $(x; y)$ من \mathbb{N}^2 التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق :

$$5^x + 5^y \equiv 3 [7]$$

تمرين 4 : (6 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$
يرمز (c) إلى منحنى f في المستوى المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
(الوحدة على المحورين 2 cm) .

1) احسب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ وفسّر النتيجة هندسياً .

- ادرس تغيّرات الدالة f .

- باستعمال منحنى الدالة " الجذر التربيعي " ، أنشئ المنحنى (c) .

- ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

2) نعرّف المتتالية (u_n) على المجموعة \mathbb{N} كالآتي :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

أ- باستعمال (D) و (c) ، مثل الحدود u_0 ، u_1 ، و u_2 على محور الفواصل .

ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها .

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$2 \leq u_n \leq 5 \text{ و } u_{n+1} > u_n$$

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة . احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

الموضوع الثاني

تمرين 1 : (5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} كثير الحدود $P(z)$ المعروف كما يلي :

$$P(z) = 2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$$

1) بين أنه إذا كان a جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذر له أيضا .

2) تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.

3) حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$.

4) اكتب الحلول على الشكل الآسي .

5) لتكن A, B, C, D والنقط من المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ والتي لاحقاتها على الترتيب : $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$.

حيث m عدد حقيقي غير معدوم .

- عين m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا .

تمرين 2 : (4 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$$

1) احسب u_1, u_2, u_3 .

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- برهن بالتراجع أن (v_n) متتالية ثابتة .

- استنتج عبارة u_n بدلالة n .

- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3) (w_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل n من \mathbb{N} بـ : $w_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- احسب المجموع S حيث : $S = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$

تمرين 3 : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر

المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين :

$$\begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\frac{1}{2}\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$$

على الترتيب .

- 1) بيّن أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .
- 2) M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (Δ') .
- أ- عيّن إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (Δ') .
- ب- احسب الطول MN .
- 3) عيّن معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .
- 4) احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') والمستوي (P) . ما ذا تلاحظ ؟

تمرين 4 : (7 نقاط)

- (I) f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة : $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$
- C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- 1) ادرس تعبيرات الدالة f .
 - 2) بيّن أن C_f يقبل نقطة انعطاف ω واكتب معادلة لمماس C_f عند النقطة ω .
 - أثبت أن ω مركز تناظر للمنحني C_f .
 - 3) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+3)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$.
 - استنتج أن C_f يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما .
 - 4) بيّن أن C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2.76; -2.77[$.
 - احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم C_f ومستقيمه المقاربين .

(II) g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة : $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$

- و C_g منحني الدالة g .
- 1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x) = f(-x)$.

- استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول C_f إلى C_g .
- 2) أنشئ المنحني C_g في نفس المعلم السابق (دون دراسة الدالة g)