

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - x - 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

(مرفوض) $x = 0$ يكافئ $g(x) = 0$ تكافئ $f'(x) = 0$

بمأن: $g(x) > 0$ من أجل $x \neq 0$ فإن $f'(x) > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

(4)

$$f(-x) = \frac{-xe^{-x}}{e^{-x} - 1}$$

$$= \frac{-x}{e^{-x}(1 - e^x)}$$

$$= \frac{-x}{1 - e^x}$$

$$f(-x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

معامل توجيه المستقيم (MM'):

$$a = \frac{y_M - y_{M'}}{x_M - x_{M'}} = \frac{f(x) - f(-x)}{x - (-x)}$$

$$a = \frac{1}{2x} \cdot x \left(\frac{e^x - 1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}$$

ومنه: $a = \frac{1}{2}$ معامل توجيه (MM').

(ب) نفرض أن f قابلة للاشتقاق عند 0 : ماذا يمثل a :

لدينا:

$$a = \frac{f(x) - f(-x)}{2x}$$

$$2a = \frac{f(x) - f(-x)}{x}$$

$$= \frac{f(x) - f(0) - f(-x) + f(0)}{x}$$

$$= \frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{f(-x) - f(0)}{x}$$

$$= \frac{f(x) - f(0)}{x} + \frac{f(-x) - f(0)}{(-x)}$$

$$2a = f'(0) + f'(0) = 2f'(0)$$

ومنه: $a = f'(0)$

إذن: معامل توجيه (MM') هو معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

إذن: $f'(0) = 1/2$

معادلة المماس هي: $y = \frac{1}{2}x + 1$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} \dots \dots \dots x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \text{ التمرين 03:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \begin{cases} xe^x \rightarrow 0 \\ e^x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (أ)$$

(ب)

$$f(x) = x \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right)$$

$$= x \left(\frac{(e^x - 1) + 1}{e^x - 1} \right)$$

$$f(x) = x \left(1 + \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{e^x - 1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{لأن}$$

إثبات أن f مستمرة عند 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \frac{x}{e^x - 1} = 1 = f(0)$$

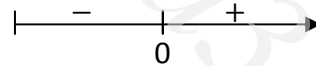
ومنه f مستمرة عند 0 :

(3) إثبات أن: $e^x \geq x + 1$

نضع: $g(x) = e^x - x - 1$

ندرس تغيرات g : $g'(x) = e^x - 1$

إشارة $g'(x)$



جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		0	

لدينا: $g(x) \geq 0$

ومنه: $e^x - x - 1 \geq 0$

إذن: $e^x \geq x + 1$

(ب) إثبات أن: من أجل $(x \neq 0)$