التمرين 03:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{xe^{x}}{e^{x}-1}............x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

أ)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \qquad \begin{cases} xe^{x}\to 0 \\ e^{x}\to 0 \\ x\to-\infty \end{cases}$$

ب)

$$f(x)=x\left(\frac{e^{x}}{e^{x}-1}\right)$$

$$=x\left(\frac{(e^{x}-1)+1}{e^{x}-1}\right)$$

$$f(x)=x\left(1+\frac{1}{e^{x}-1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{e^{x}-1}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{e^{x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^{x}-1}{x}}=1$$

لأن $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$

إثبات أن f مستمرة عند 0

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0} e^{x}\frac{x}{e^{x}-1}=1=f(0)$$

ومنه f مستمرة عند 0:

3) اثبات أن: $e^{x}\geq x+1$

نضع : $g(x)=e^{x}-x-1$

ندرس تغيرات g : $g'(x)=e^{x}-1$

إشارة $g'(x)$

x		0	
$g'(x)$	$-$		$+$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↗

لدينا: $g(x)\geq 0$

ومنه: $e^{x}-x-1\geq 0$

إذن: $e^{x}\geq x+1$

ب) إثبات أن: من أجل $(x\neq 0)$

$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{e^{x}\,(e^{x}-x-1)}{(e^{x}-1)^{2}}=\frac{e^{x}\,g(x)}{(e^{x}-1)^{2}}}$$

$f'(x)=0$ تكافئ $g(x)=0$ يكافئ $x=0$ (مرفوض)

بمأن: $g(x)>0$ من أجل $x\neq 0$ فإن : $f'(x)>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1	↗ $+\infty$

(4

$$f(-x)=\frac{-xe^{-x}}{e^{-x}-1}$$

$$=\frac{-x}{e^{-x}(1-e^{x})}$$

$$=\frac{-x}{1-e^{x}}$$

$$f(-x)=\frac{x}{e^{x}-1}$$

<u>معامل توجيه المستقيم (MM'):</u>

$$a==\frac{y_M-y_{M'}}{x_M-x_{M'}}=\frac{f(x)-f(-x)}{x-(-x)}$$

$$a=\frac{1}{2x}.x\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}-1}\right)=\frac{1}{2}$$

ومنه: $a=\frac{1}{2}$ معامل توجيه (MM').

ب) <u>نفرض أن f قابلة للاشتقاق عند 0: ماذا يمثل a :</u>

لدينا:

$$a=\frac{f(x)-f(-x)}{2x}$$

$$2a=\frac{f(x)-f(-x)}{x}$$

$$=\frac{f(x)-f(0)-f(-x)+f(0)}{x}$$

$$=\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{f(-x)-f(0)}{x}$$

$$=\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f(-x)-f(0)}{(-x)}$$

$$2a=\ f'(0)+f'(0)=2f'(0)$$

ومنه : $a=f'(0)$

إذن : معامل توجيه (MM') هو معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0.

إذن: $f'(0)=1/2$

معادلة المماس هي : $y=\frac{1}{2}x+1$